ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА *)

Аревшатян Н.Г., Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ն.Գ. Արևշատյան , Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծռումը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ

Ճշգրտված [1] տեսության շրջանակներում լուծվում է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ գտնվող գծայնորեն փոփոխական հաստության օրթոտրոպ կլոր սալի ծռման խնդիրը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ: Դիտարկվում են սալի եզրագծի հոդակապորեն հենման և կոշտ ամրակցման դեպքերը: Կիրառվում է եզրային խնդիրը Կոշու խնդրի բերելու եղանակը [2], [3]:

Ստացված արդյունքների վերլուծության հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ սալի առավելագույն ճկվածքի վրա ընդլայնական սահքի ազդեցության վերաբերյալ՝ կախված նյութի օրթոտրոպիայի բնույթից և հաստության փոփոխման վարքից:

N.G.Arevshatian, R.M.Kirakosian, S.P.Stepanian
On Bending of Orthotropic Circular Plate of Variable Thickness With the Account of Transverse Shear Strains

В рамках уточненной теории [1] решается задача изгиба ортотропной круглой пластинки линейно-переменной толщины, находящейся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки, при учете влияния поперечного сдвига. Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Применяется метод приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. На основе анализа полученных результатов делаются качественные заключения о влиянии поперечного сдвига на величину наибольшего прогиба пластинки в зависимости от характера ортотропии материала и поведения изменения толщины пластинки.

1. Пусть шарнирно опертая или защемленная по контуру ортотропная пластинка радиуса R, толщина которой h, изменяется по закону

$$h = h_0 + h_1 r, \quad 0 \le r \le R, \quad h_1 > -\frac{h_0}{R} \tag{1.1}$$

находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q. Здесь r - радиальная координата, h_0 - толщина пластинки в центре, а параметр h_1 характеризует поведение изменения толщины в радиальном направлении.

Рассмотрим задачу изгиба пластинки в рамках уточненной теории [1], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Воспользуемся методом формального приведения краевой задачи к соответствующей задаче Коши [2], [3]. Введем следующие обозначения:

$$r = c\rho, \quad \frac{h_0}{c} = s, \quad \frac{h_1}{s} = \gamma, \quad h = h_0 H, \quad \frac{B_0}{B_r} = m^2, \quad \frac{B_r}{\sigma_0} = n$$

---

*) Доложена на международной конференции по теоретической и прикладной механике (Ереван, 17-19, IX, 1994 г.)

$\sqrt{B_0/B_r} = 1$, $\nu_r = 0.3$

Таблица 2

h_1R/h_0	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	40	80	0	20	40	0	10	20
шарнирное опирание									
w^*	3.003	3.251	3.498	1.279	1.404	1.529	0.399	0.451	0.502
$\Delta_ш$	–	8.25	16.48	–	9.77	19.5	–	12.7	25.4
Защемление									
w^*	1.003	1.365	1.726	0.313	0.438	0.563	0.079	0.117	0.156
$\Delta_з$	–	36.1	72.14	–	39.9	79.8	–	49.0	97.9
$\Delta_з/\Delta_ш$	–	4.37	4.38	–	4.08	4.09	–	3.86	3.85

$\sqrt{B_0/B_r} = 2$, $\nu_r = 0.3$

Таблица 3

h_1R/h_0	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	20	40	0	10	20	0	5	10
шарнирное опирание									
w^*	1.069	1.224	1.379	0.376	0.438	0.501	0.105	0.128	0.150
$\Delta_ш$	–	14.5	29.0	–	16.6	33.2	–	21.4	42.8
Защемление									
w^*	0.516	0.696	0.877	0.167	0.230	0.292	0.045	0.065	0.085
$\Delta_з$	–	35.0	69.9	–	37.4	74.7	–	44.3	88.7
$\Delta_з/\Delta_ш$	–	2.41	2.41	–	2.25	2.25	–	2.07	2.07

Данные таблиц приводят к следующим заключениям:

1. Учет поперечного сдвига, как и следовало ожидать, и в случае переменной толщины, приводит к увеличению прогибов пластинки.
2. Размер увеличения прогиба существенным образом зависит от характера ортотропии материала и от поведения изменения толщины пластинки.

Он растет при:

а) увеличении отношения B_r/G_{rz}, то есть уменьшения относительного модуля поперечного сдвига;

б) росте параметра h_1R/h_0, то есть утолщении пластинки вдоль радиуса;

$$\frac{\sigma_0}{G_{rz}} = l,\ q^* = \frac{6q}{n\sigma_0 c^3},\ w = h_0\bar{w},\ \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha,\ \varphi_1 = \sigma_0 t \tag{1.2}$$

$$c\alpha - h = y,\ \frac{dy}{d\rho} = \upsilon,\ M_r = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_r,\ M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta$$

Здесь c — неизвестная постоянная размерности длины, ρ — безразмерная радиальная координата, φ_1 — функция, характеризующая влияние поперечного сдвига [1], σ_0 — характерное напряжение, B_r, B_θ, и B_{rz} — механические параметры материала пластинки [4].

С помощью этих обозначений для безразмерных величин толщины H и изгибающих моментов пластинки $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$ получим

$$\begin{aligned} H &= 1 + \gamma\rho,\ \bar{M}_r = -\frac{nsH^3}{12\rho}\left(\rho\upsilon + \nu_r m^2 y\right) \\ \bar{M}_\theta &= -\frac{nsH^3 m^2}{12\rho}\left(\nu_r \rho\upsilon + y\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

где ν_r - соответствующий коэффициент Пуассона.

Осесимметричный изгиб пластинки описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [1]:

$$\frac{dy}{d\rho} = \upsilon,\ \frac{d\upsilon}{d\rho} = \frac{q^*\rho}{H^3} - \frac{1+4\gamma\rho}{\rho H}\upsilon + \frac{m^2\left[1+\left(1-3\nu_r\right)\gamma\rho\right]}{\rho^2 H} y = F(\rho, y, \upsilon) \tag{1.4}$$

В малой окрестности центра пластинки $\rho \le \rho_0$, где ρ_0 - достаточно малое число, система (1.4) допускает асимптотические решения

$$y = \begin{cases} A_1\rho^m, & m < 3 \\ \dfrac{1}{6}q^*\rho^3 \ln\rho, & m = 3 \\ \dfrac{q^*}{9-m^2}\rho^2, & m > 3 \end{cases},\qquad \upsilon = \begin{cases} A_1 m\rho^{m-1}, & m < 3 \\ \dfrac{1}{2}q^*\rho^2 \ln\rho, & m = 3 \\ \dfrac{3q^*}{9-m^2}\rho^2, & m > 3 \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь $A_1 < 0$ - произвольная постоянная.

Систему уравнений (1.4) удобно решать численно. Задаваясь некоторыми значениями параметров γ_1, A_1, q^* и переходя к конечным разностям, можно значения функции y и υ в последующих друг другу сечениях $\rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho$, $(i = 1,2,3,\ldots)$ вычислить по формулам

$$y_i = y_{i-1} + \upsilon_{i-1}\Delta\rho,\quad \upsilon_i = \upsilon_{i-1} + F_{i-1}\Delta\rho \quad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{1.6}$$

Здесь $\Delta\rho$ - шаг численного интегрирования.

Начальные значения y_0 и υ_0 определяются из асимптотических выражений (1.5) для некоторого малого ρ_0. Численное интегрирование системы (1.4) продолжается до того значения безразмерной координаты $\rho_R = R/c$, для которого удовлетворяется краевое условие задачи, откуда и определяется неизвестная постоянная c. Этим фактически завершается решение задачи, поскольку после него можно вычислить значения расчетных величин в любой точке пластинки.

Рассмотрим два варианта краевых условий:

1. Условие шарнирного опирания

$$\rho\upsilon + \nu_r m^2 y = 0 \qquad (M_r = 0) \tag{1.7}$$

2. Условие защемления

$$y = 0 \qquad (u_r = 0) \tag{1.8}$$

Так как с удалением от центра защемленной по контуру пластинки изгибающий момент M_r убывает и, не доходя до края, в некотором сечении превращается в нуль, то сначала удовлетворяется условие шарнирного опирания. Поэтому в ходе решения задачи защемленной по контуру пластинки попутно получается и решение задачи при шарнирном опирании. При желании можно путем варьирования одного из параметров A_1, γ и q^* добиться того, чтобы краевое условие удовлетворялось при $\rho = 1$. Тогда безразмерный прогиб пластинки определится по формуле

$$\overline{w} = -\frac{1}{s}\int_{\rho}^{1}(y + ht)d\rho \tag{1.9}$$

где

$$t = \frac{ns^2\gamma H}{8\rho}\left(\rho\upsilon + \nu_r m^2 y\right) - \frac{q^* ns^2}{8H}\rho \tag{1.10}$$

2. В табл. 1-3 представлены значения величин

$$w^* = \frac{w_0}{h_0}\frac{h_0^3}{R^3}\frac{B_r}{6q}, \qquad \Delta = \frac{w_0 - w_0^{\text{кл}}}{w_0^{\text{кл}}}\cdot 100\% \tag{2.1}$$

подсчитанные при некоторых характерных значениях параметров $h_1 R/h_0$, $\sqrt{B_0/B_r}$ и B_r/G_{rz}. Через $w_0^{\text{кл}}$ и w_0 обозначены прогибы центра пластинки, полученные по классической и уточненной теориям. Величина Δ определяет поправку к наибольшему прогибу пластинки в процентах, вносимую с учетом поперечного сдвига. В последних строках таблиц приведены значения отношения поправок, соответствующих защемлению $\Delta_з$ и шарнирному опиранию $\Delta_ш$ контура пластинки

$$\sqrt{B_0/B_r} = 0.5, \qquad \nu_r = 0.3$$

Таблица 1

$h_1 R/h_0$	-0.5			0			1		
B_r/G_{rz}	0	50	100	0	30	50	0	10	20
	шарнирное опрание								
w^*	7.014	7.208	7.403	3.806	3.994	4.119	1.456	1.520	1.584
$\Delta_ш$	–	2.77	5.55	–	4.92	8.20	–	4.38	8.76
	Защемление								
w^*	1.638	2.095	2.551	0.477	0.664	0.789	0.109	0.146	0.183
$\Delta_з$	–	27.9	55.7	–	39.3	65.5	–	34.00	67.9
$\Delta_з/\Delta_ш$	–	10.07	10.04	–	7.99	7.99	–	7.76	7.75

в) увеличении параметра B_0/B_r, то есть отношения модулей Юнга материала кольцевого и радиального направлений E_0/E_r.

3. Поправка, вносимая учетом поперечного сдвига, при защемлении контура пластинки получается значительно больше, чем при шарнирном опирании. Отношение этих поправок уменьшается с ростом модуля упругости материала в кольцевом направлении. Например, при возрастании отношения E_0/E_r от $0.25\left(\sqrt{\dfrac{B_0}{B_r}}=0.5\right)$ до $4\left(\sqrt{\dfrac{B_0}{B_r}}=2\right)$ отношение $\Delta_з/\Delta_ш$ убывает в пять раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины. - Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, №5-6, с.64-73.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
3. Киракосян Р.М. Об одной задаче круглой пластинки наименьшего объема за пределом упругости материала. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1977, т.30, №1, с.21-32.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. 360 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 29.05.1996