ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, №3-4, 1997 Механика

ВОЛНЫ ТИПА РЭЛЕЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КРУГОВОЙ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Գ.Ռ. Ղուլղազարյան, Ա.Վ. Սահակյան
Ռելեյի տիպի ալիքները կիսաանվերջ փակ շրջանային գլանային թաղանթում

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթ (ոչ ծռման), Ռելեյի տիպի ալիքների տարածման հարցը, որը մարում է կիսաանվերջ շրջանային գլանային թաղանթի ազատ ծայրից ծնիչի ուղղությամբ:

Հետազոտումը կատարվում է ճկուն իզոտրոպ կիսաանվերջ թաղանթի համար, հաշվի առնելով ծռման կոշտության առկայությունը:

Ապացուցվում է, որ թաղանթի ցանկացած հարաբերական հաստության և երկուսից մեծ ալիքային թվի դեպքում գոյություն ունի փուլային արագության ոչ չափողական η բնութագրիչ, որը բավարարում է $0<\eta<1$ անհավասարությանը:

M.V. Belubeklan, G.R. Gulgazaryan, A.V. Sahaklan
The waves of rayleighs type in semi - infinite clossed circullar cilindrical shells

В работе исследуется вопрос распространения плоской (не изгибной) волны типа Рэлея, затухающей от свободного торца полубесконечной круговой цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих. Исследование проводится для изотропной упругой полубесконечной оболочки с учетом изгибной жесткости.

Доказывается, что при любой относительной толщине оболочки и числе волн больше двух, существует безразмерная характеристика фазовой скорости η, удовлетворяющая неравенству $0<\eta<1$.

1.Моментная задача. В качестве исходных уравнений возьмем следующие уравнения, которые соответствуют технической теории цилиндрических оболочек [1]:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}=\lambda u_1$$

$$-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\beta}=\lambda u_2 \tag{1.1}$$

$$\mu^4\Delta^2 u_3-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{u_3}{R^2}=\lambda u_3$$

Здесь R - радиус направляющей окружности, u_1,u_2,u_3 - проекции смещения точки срединной поверхности, α и β - ортогональные координаты точки срединной поверхности

$$\lambda=\left(1-\sigma^2\right)\omega^2\rho/E \tag{1.2}$$

где ρ - удельная плотность материала оболочки, E - модуль Юнга, σ - коэффициент Пуассона, ω - угловая частота, $\mu^4=h^2/12$ (h -

относительная толщина оболочки), Δ - оператор Лапласа, $\Delta^2 = \Delta\Delta$ - бигармонический оператор.

Для дальнейшей цели удобно систему (1.1) заменить системой уравнений [2]

$$
\begin{gathered}
\left(\Delta^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)u_1 = -\frac{1}{R}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{\sigma}{R}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} + \frac{2\lambda\sigma}{(1-\sigma)R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha} \\
\left(\Delta^2 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\right)u_2 = \frac{2+\sigma}{R}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3} + \frac{2\lambda}{(1-\sigma)R}\frac{\partial u_3}{\partial\beta} \\
\mu^4\left(\Delta^2\Delta^2 u_3 + \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda\Delta\Delta^2 u_3 + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\Delta^2 u_3\right) - \\
-\lambda\Delta^2 u_3 - \frac{3-\sigma}{1-\sigma}\lambda^2\Delta u_3 + \frac{(1-\sigma^2)}{R^2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^4} + \\
+\frac{\lambda}{R^2}\Delta u_3 + \frac{2(1+\sigma)}{R^2}\lambda\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2} + \frac{2\lambda^2}{1-\sigma}\left(\frac{1}{R^2} - \lambda\right)u_3 = 0
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Граничные условия на свободном торце цилиндра принимают вид

$$
\begin{gathered}
\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0} = 0 \\
\left.\frac{\partial u_1}{\partial\beta} + \frac{\partial u_2}{\partial\alpha} + 4\mu^4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right)\right|_{\alpha=0} = 0 \\
\left.\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{2-\sigma}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha=0} = 0
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Решение системы (1.3) ищем в виде

$$
\begin{gathered}
u_1 = u\exp\left(\frac{m}{R}\chi\alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta \\
u_2 = v\exp\left(\frac{m}{R}\chi\alpha\right)\sin\frac{m}{R}\beta \\
u_3 = \exp\left(\frac{m}{R}\chi\alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Подставим (1.5) в (1.3). Из первых двух уравнений системы (1.3) получим:

$$
\begin{gathered}
u = \frac{1}{m}\frac{\chi(\sigma\chi^2 + 1 + \sigma\eta^2)}{(\chi^2-1)^2 + (3-\sigma)/2\ \eta^2(\chi^2-1) + (1-\sigma)/2\ \eta^4} \\
v = -\frac{1}{m}\frac{(2+\sigma)\chi^2 - 1 + \eta^2}{(\chi^2-1)^2 + (3-\sigma)/2\ \eta^2(\chi^2-1) + (1-\sigma)/2\ \eta^4}
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

где

$$
\eta^2 = \frac{2}{1-\sigma}\frac{\lambda R^2}{m^2}
\tag{1.7}
$$

Из третьего уравнения системы (1.3), учитывая, что (1.5) является нетривиальным решением, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\chi^8 - \gamma_1 \chi^6 + \gamma_2 \chi^4 - \gamma_3 \chi^2 + \gamma_4 = 0 \tag{1.8}$$

где

$$\gamma_1 = 4 - (3-\sigma)/2\,\eta^2$$

$$\gamma_2 = 6 + \frac{2(1+\sigma)A}{m^2} - \left(A + \frac{3}{2}(3-\sigma)\right)\eta^2 + \frac{1-\sigma}{2}\eta^4$$

$$\gamma_3 = 4 - \left(2A + \frac{3+2\sigma}{m^2}A + \frac{3}{2}(3-\sigma)\right)\eta^2 + \left(\frac{3-\sigma}{2}A + 1 - \sigma\right)\eta^4 \tag{1.9}$$

$$\gamma_4 = \left(1-\eta^2\right)\left(1 - \left(\left(1+\frac{1}{m^2}\right)A + \frac{1-\sigma}{2}\right)\eta^2 + \frac{1-\sigma}{2}A\eta^4\right)$$

$$A = (1-\sigma)/\left(2a^2 m^2\right), \qquad a^2 = \mu^4/R^2$$

Исходя из критерия Гурвица, можно доказать, что при любом a^2, σ и $|m| \geq 2$ существует $\eta = \eta_0$ такое, что $0 < \eta_0 < 1$ и для всех η, удовлетворяющих неравенствам,

$$0 \leq \eta \leq \eta_0 \tag{1.10}$$

все четыре χ^2 - корни уравнения (1.8), имеют положительные действительные части. Вне условий (1.10) корни уравнения (1.8) этим свойством не обладают.

Последнее высказывание эквивалентно тому, что система уравнений (1.1) при условии (1.10) имеет четыре решения вида (1.5), которые затухают при $\alpha \to +\infty$.

Для определенности предположим, что $m > 0$ и χ_j $(j = 1,2,3,4)$ являются корнями уравнения (1.8) с отрицательными действительными частями. Пусть

$$y^{(j)}(\eta, \alpha, \beta) = \left(u_1^j, u_2^j, u_3^j\right), \quad j = 1,2,3,4 \tag{1.11}$$

являются решениями системы (1.1) вида (1.5) при $\chi = \chi_j$, $j = 1,2,3,4$ соответственно.

Решение задачи (1.1), (1.4) ищем в виде

$$u_1 = \sum_{j=1}^{4} w_j u_1^j = \sum_{j=1}^{4} w_j u_j \exp\left(\frac{m}{R}\chi_j \alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{4} w_j u_2^j = \sum_{j=1}^{4} w_j v_j \exp\left(\frac{m}{R}\chi_j \alpha\right)\sin\frac{m}{R}\beta \tag{1.12}$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^{4} w_j u_3^j = \sum_{j=1}^{4} w_j \exp\left(\frac{m}{R}\chi_j \alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta$$

где u_j и v_j - значения u и v из (1.6) при $\chi = \chi_j$ соответственно.

Подставляя (1.12) в (1.4), придем к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{m}{R}\left(\chi_j^2 - \sigma\right) + \frac{\sigma}{R}v_j\right)w_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{m}{R}\chi_j u_j + \frac{\sigma m}{R}v_j - \frac{\sigma}{R}\right)w_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(-u_j + \chi_j v_j + 4a^2\left(-m\chi_j + \chi_j v_j\right)\right)w_j = 0 \tag{1.13}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{m}{R}\chi_j^2-(2-\sigma)\frac{m}{R}\chi_j+\frac{2-\sigma}{R}\chi_j v_j\right)w_j=0$$

Подставим значения u_j и v_j, $j=1,2,3,4$ в (1.13), получим

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{R_{ij}}{c_j}w_j=0,\qquad i=1,2,3,4 \tag{1.14}$$

где

$$R_{1j}=\left(\chi_j^2-\sigma\right)c_j-\sigma b_j/m^2,\quad R_{2j}=\chi_j^2 a_j-\sigma b_j-\sigma c_j$$

$$R_{3j}=\chi_j\left(4a^2c_j+a_j/m^2+\left(1+4a^2\right)b_j/m^2\right) \tag{1.15}$$

$$R_{4j}=\chi_j\left(\left(\chi_j^2-2+\sigma\right)c_j-(2-\sigma)b_j/m^2\right)$$

$$a_j=1+\sigma\eta^2+\sigma\chi_j^2,\qquad b_j=(2+\sigma)\chi_j^2+\eta^2-1$$

$$c_j=\left(\chi_j^2-1\right)^2+(3-\sigma)/2\,\eta^2\left(\chi_j^2-1\right)+(1-\sigma)/2\,\eta^4$$

Чтобы система (1.14) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель обратился в нуль. Отсюда приходим к уравнению для определения η

$$D=\left|R_{ij}\right|_{i=1,j=1}^{4}=0 \tag{1.16}$$

Производя элементарные действия над столбцами определителя, получим

$$D=k\left|m_{ij}\right|_{i=1,j=1}^{4} \tag{1.17}$$

где

$$k=(\chi_1-\chi_2)(\chi_1-\chi_3)(\chi_1-\chi_4)(\chi_2-\chi_3)(\chi_2-\chi_4)(\chi_3-\chi_4)$$

$$m_{11}=R_{11},\quad m_{12}=(\chi_1+\chi_2)\left(\chi_1^4+\chi_1^2\chi_2^2+\chi_2^4+\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-\right.\right. \tag{1.18}$$

$$\left.\left.-2-\sigma\right)\left(\chi_1^2+\chi_2^2\right)+d_1\right),\quad m_{13}=\gamma_1^2-\chi_4^2\gamma_1-\gamma_2+\left(\gamma_1-\chi_4^2\right)\times$$

$$\times\left(s_2-\chi_4 s_1+\chi_4^2\right)+\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-2-\sigma\right)\left(\gamma_1+s_2-\chi_4 s_1\right)+d_1,$$

$$m_{14}=\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-2-\sigma+\gamma_1\right)s_1+s_3,\qquad m_{21}=R_{21}$$

$$m_{22}=\left(1-\sigma^2-\sigma(1-\sigma)/2\,\eta^2\right)(\chi_1+\chi_2),$$

$$m_{23}=1-\sigma^2-\sigma(1-\sigma)/2\,\eta^2,$$

$$m_{24}=0,\quad m_{31}=R_{31},\quad m_{32}=4a^2\left(\chi_1^4+\chi_1^3\chi_2+\chi_1^2\chi_2^2+\right.$$

$$\left.+\chi_1\chi_2^3+\chi_2^4\right)+d_2\left(\chi_1^2+\chi_1\chi_2+\chi_2^2\right)+d_3,\quad m_{33}=\left(4a^2\left(\gamma_1-\chi_4^2\right)+\right.$$

$$\left.+d_2\right)\left(s_1-\chi_4\right)+4a^2\chi_1\chi_2\chi_3,\quad m_{34}=4a^2\left(\gamma_1+s_2\right)+d_2$$

$$m_{41}=R_{41},\quad m_{42}=\chi_1^6+\chi_1^5\chi_2+\chi_1^4\chi_2^2+\chi_1^3\chi_2^3+\chi_1^2\chi_2^4+\chi_1\chi_2^5+\chi_2^6+$$

$$\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-4+\sigma\right)\left(\chi_1^4+\chi_1^3\chi_2+\chi_1^2\chi_2^2+\chi_1\chi_2^3+\chi_2^4\right)+$$

$$+d_4\left(\chi_1^2+\chi_1\chi_2+\chi_2^2\right)+d_5,\quad m_{43}=\left(\gamma_1^2-\gamma_1\chi_4^2-\gamma_2+d_4+\right.$$

$$+\left(\gamma_1-\chi_4^2\right)\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-4+\sigma\right)\left(s_1-\chi_4\right)+$$

$$+\left(\gamma_1-\chi_4^2+(3-\sigma)/2\,\eta^2-4+\sigma\right)\chi_1\chi_2\chi_3, \qquad m_{44}=\gamma_1^2+d_1-$$

$$-\gamma_2+\sqrt{\gamma_4}+\gamma_1\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-4+\sigma\right)+\left(\gamma_1+(3-\sigma)/2\,\eta^2-4+\sigma\right)s_2.$$

$$s_1=\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4\,.$$

$$s_2=\chi_1\chi_2+\chi_1\chi_3+\chi_1\chi_4+\chi_2\chi_3+\chi_2\chi_4+\chi_3\chi_4\,.$$

$$s_3=\chi_1\chi_2\chi_3+\chi_1\chi_2\chi_4+\chi_1\chi_3\chi_4+\chi_2\chi_3\chi_4\,.$$

$$d_1=1+2\sigma-(2+\sigma)\sigma/m^2-(3-\sigma)(1+\sigma)/2\,\eta^2+(1-\sigma)/2\,\eta^2$$

$$d_2=4a^2\left((3-\sigma)/2\,\eta^2-2\right)+\left((2+\sigma)\left(1+4a^2\right)+\sigma\right)/m^2$$

$$d_3=4a^2\left(1-(3-\sigma)/2\,\eta^2+(1-\sigma)/2\,\eta^4\right)+$$

$$+\left(1+\sigma\eta^2+\left(1+4a^2\right)\left(\eta^2-1\right)\right)/m^2\,.$$

$$d_4=5-2\sigma-(3-\sigma)^2/2\,\eta^2+(1-\sigma)/2\,\eta^4-\left(4-\sigma^2\right)/m^2\,.$$

$$d_5=-(2-\sigma)\left(1-(3-\sigma)/2\,\eta^2+(1-\sigma)/2\,\eta^4-(2-\sigma)\left(\eta^2-1\right)/m^2\right.$$

Заметим, что в двух значениях η, удовлетворяющих условию (1.10), уравнение (1.8) имеет двухкратные корни (этот факт устанавливается численным анализом корней уравнения (1.8)

Ясно, что в этих значениях η, определитель D аннулируется и не может отвечать на вопрос: являются ли они характеристиками фазовой скорости или нет.

Для определенности предположим, что $\chi_1=\chi_2$ при $\eta=\eta_1$. Тогда векторы $y^{(1)}(\eta_1,\alpha,\beta)$ и $y^{(2)}(\eta_1,\alpha,\beta)$ из (1.11) сливаются. Можно, однако, вместо решений $y^{(1)}(\eta,\alpha,\beta)$ и $y^{(2)}(\eta,\alpha,\beta)$ ввести пару решений $z^{(1)}(\eta,\alpha,\beta)$ и $z^{(2)}(\eta,\alpha,\beta)$ системы (1.1) по формулам

$$z^{(1)}=y^{(1)}\,,\quad z^{(2)}=\left(y^{(2)}-y^{(1)}\right)/\left(\chi_2-\chi_1\right) \tag{1.19}$$

которые также убывают при $\alpha\to+\infty$. Легко проверить, что решения (1.19) остаются линейно-независимыми и при $\eta=\eta_1$.

Решение задачи (1.1), (1.4) ищем в виде

$$y=w_1z^{(1)}+w_2z^{(2)}+w_3y^{(3)}+w_4y^{(4)} \tag{1.20}$$

Учитывая граничные условия (1.4), мы придем к системе уравнений

$$\frac{R_{i1}}{c_1}w_1+\left(\frac{R_{i2}}{c_2}-\frac{R_{i1}}{c_1}\right)\frac{w_2}{\chi_2-\chi_1}+\frac{R_{i3}}{c_3}w_3+\frac{R_{i4}}{c_4}w_4=0 \tag{1.21}$$

где $c_j,R_{ij},i,j=1,2,3,4$ определяются формулой (1.15).

Легко заметить, что определитель системы (1.21) можно преобразовать к виду

$$D_1=\left(c_1c_2c_3c_4\right)^{-1}k_1\left|m_{ij}\right|_{i,j=1}^{4} \tag{1.22}$$

где

$$k_1=\left(\chi_1-\chi_3\right)\left(\chi_1-\chi_4\right)\left(\chi_2-\chi_3\right)\left(\chi_2-\chi_4\right)\left(\chi_3-\chi_4\right)$$

который при $\eta=\eta_1$ не аннулируется. Таким образом, дисперсионным уравнением задачи (1.1), (1.4) является уравнение

$$\left|m_{i,j}\right|_{i=1,j=1}^{4} = 0 \qquad (1.23)$$

где элементы m_{ij} определяются формулами (1.18).

Замечание 1. Так как в выражениях (1.9), (1.15) m входит в четные степени, а замена χ_j на $-\chi_j$, $j = 1,2,3,4$ не отражается на величине D из (1.16), то η не зависит от знаков m и от одноименных знаков действительных частей $\chi_j\ (j = 1,2,3,4)$.

Замечание 2. Численный анализ показывает, что уравнение (1.23) при условии (1.10) имеет только один корень.

2.Безмоментная задача. Подставим в (1.1) и (1.4) $\mu = 0$. Отбрасываем первое и четвертое условия из (1.4). Так возникает вырожденная (безмоментная) задача:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}=\lambda u_1\\
-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\beta}=\lambda u_2 \qquad (2.1)\\
-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{u_3}{R}=\lambda u_3
\end{gathered}
$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right|_{\alpha=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0}=0 \qquad (2.2)$$

Здесь используем систему (1.3), полагая $\mu = 0$. Решение системы (2.1) ищем в виде (1.5). Тогда, из третьего уравнения системы (1.3) (при $\mu = 0$) получим следующее характеристическое уравнение:

$$g_1\chi^4 + g_2\chi^2 + g_3 = 0 \qquad (2.3)$$

где

$$
\begin{gathered}
g_1=\frac{2(1+\sigma)}{m^2}-\eta^2,\ g_2=\left(2+\frac{3+2\sigma}{m^2}\right)\eta^2-\frac{3-\sigma}{2}\eta^4\\
g_3=\left(\eta^2-1\right)\left(\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\eta^2-\frac{1-\sigma}{2}\eta^4\right) \qquad (2.4)
\end{gathered}
$$

Заметим, что уравнение (2.3) имеет два корня с отрицательными действительными частями только тогда, когда $0 < \eta < 1$ и $|m| \geq 2$.

Пусть, например, χ^1, χ^2 - корни уравнения (2.3) с отрицательными действительными частями и $m > 0$. Решение задачи (2.1), (2.2) ищем в виде

$$
\begin{gathered}
u_1=\sum_{j=1}^{2} w^j u^j \exp\left(\frac{m}{R}\chi^j\alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta\\
u_2=\sum_{j=1}^{2} w^j v^j \exp\left(\frac{m}{R}\chi^j\alpha\right)\sin\frac{m}{R}\beta \qquad (2.5)\\
u_3=\sum_{j=1}^{2} w^j \exp\left(\frac{m}{R}\chi^j\alpha\right)\cos\frac{m}{R}\beta
\end{gathered}
$$

где u^j и v^j - значения u и v из (1.6) при $\chi = \chi^j$. Используя граничные условия (2.2), придем к дисперсионному уравнению

$$\eta^6 - 2\left(4 + \frac{2+4\sigma+\sigma^2}{1+\sigma}\frac{1}{m^2}\right)^2 \eta^4 + 4\left(1+\frac{1}{m^2}\right) \times$$
$$\times\left(4 + 2\sigma + \frac{1+2\sigma}{m^2}\right)\eta^2 - 8(1+\sigma)\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^2 = 0 \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) эквивалентно уравнениям (11) из [3] и (24) из [4]. Заметим, что вид уравнения (2.6) инвариантен относительно изменения знака m и одноименных знаков действительных частей χ^1 и χ^2.

В табл. 1 приведены значения η в зависимости от m и a^2 при $\sigma = 1/3$.

Таблица 1

m	η		
	$a^2 = 1/4800$	$a^2 = 1/120000$	$a^2 = 0$ (безм. задача)
1	2	3	4
2	0,04461	0,00894	0,97709
3	0,07091	0,01421	0,94729
4	0,09669	0,01939	0,93558
5	0,12211	0,02448	0,92990
6	0,14741	0,02955	0,92675
7	0,17259	0,03457	0,92483
8	0,19774	0,03962	0,92357
9	0,22282	0,04461	0,92270
10	0,24788	0,04970	0,92208
11	0,27295	0,05468	0,92162
12	0,29782	0,05958	0,91265

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик М.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек.-М.: Наука, 1979. 383с.
2. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки.-Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, №1, с.61-70.
3. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.- Волновые задачи механики. Нижний Новгород, 1992, 153с.
4. Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке.-Изв. НАН Армении, Механика, 1997, т.50, №1, с.27-33

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.03.1996