

## ЗОНА УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ЛИСТА

Задоян М.А.

Մ.Ա. Զադոյան  
Աճրապնդման գոտիները շերտի ծծման ժամանակ

Հետազոտվում է աճրապնդման գոտիները շերտի ծծման ժամանակ, երբ նյութի ձգման դիտարանման օժտված է հեռու-հուռուկության գծային աճրապնդման միջավայրով: Խնդիրը քննարկվում է հարթ ունիֆորմացիայի պայմաններում, առանց օգտագործելու ուղիղ երրանյանի կիսարկը: Ստացված են լարումների բաղադրիչները սեղմվող և ձգվող գոտիներում, որոշված է շերտ գոտու շառավիղը: Էյլ գոտին հանդիսանում է լարումների լարման մակերևույթ:

Որոշված է սահմանային մոնենտի արժեքը, որը կարող է կրել շերտը:

M.A. Zadoyan  
The Areas of Hardening in the case of Plate Bending

Исследуются зоны упрочнения при изгибе листа, когда после площадки текучести в диаграмме растяжения материала наступает этап линейного упрочнения.

Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, являющийся поверхностью разрыва напряжений. Определен предельный момент, который может выдержать лист.

В работе Р.Хилла [1] рассмотрен чистый изгиб прямоугольного листа из несжимаемого идеально-пластичного материала. Задача рассматривается в рамках плоской деформации, без использования гипотезы прямых нормалей. Получены компоненты напряжений в сжатой и растянутой зонах, определен радиус нейтрального слоя, который является поверхностью разрыва напряжений, и, наконец, предельный момент, который может выдержать лист.

Многие мегаллические материалы после зоны текучести приобретают способность заметно понижать свою сопротивляемость дальнейшему пластическому деформированию. На фиг.1 приведена схематизированная диаграмма растяжения такого жесткопластического материала, имеющего после текучести, для простоты, этап линейного упрочнения.

По такой же схеме, а также по диаграмме, имеющей начальную упругую зону, в работах [2,3] исследованно запредельное состояние пластинки под воздействием сосредоточенной силы, состояние пластинки, с круговым отверстием, находящегося под воздействием силы, приложенной в ее плоскости в бесконечности.

Величины  $\sigma_y$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\epsilon_x$  – механические параметры, определяемые из экспериментов по одноосному растяжению или по испытанию тонкостенных труб на кручение. Точка  $(\sigma_y, \epsilon_y)$  на диаграмме соответствует временному сопротивлению материала.

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается запредельное напряженное состояние толстого листа из несжимаемого, идеально-жесткопластического упрочняющегося материала, находящегося в состоянии плоской деформации под

воздействием изгибающих моментов  $M$ , приложенных на торцевых сечениях. Задача заключается в определении напряженного состояния листа и предельного значения момента, соответствующего временному сопротивлению материала.

В случае плоской деформации имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Между интенсивностями напряжений и деформаций принимаем зависимость

$$\sigma_\theta = f(\epsilon_\theta) \epsilon_\theta \quad \text{где} \quad f(\epsilon_\theta) = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{\epsilon_s} & \text{при } 0 \leq \epsilon_\theta \leq \epsilon_s \\ \epsilon_\theta & \text{при } \epsilon_s \leq \epsilon_\theta \leq \epsilon_c \\ H & \text{при } \epsilon_c \leq \epsilon_\theta \leq \epsilon_e \end{cases}$$

причем  $\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{H}$ ,  $H = \frac{\sigma_s}{\epsilon_s}$  - параметры, характеризующие деформативные свойства материала.

Зависимости между компонентами деформаций и напряжений при условии несжимаемости материала  $\epsilon_r + \epsilon_\theta = 0$  принимаются в виде

$$\sigma_y - \delta_y \sigma = 2f(\epsilon_\theta) \epsilon_y$$

где  $\delta_y$  - символ Кронекера, а  $\sigma$  - среднее давление

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Компоненты перемещений ищем в виде

$$u = Ar + \frac{C}{r}, \quad v = 2Ar\theta$$

Соответственно, деформации будут

$$\epsilon_\theta = -\epsilon_r = -A + \frac{C}{r^2}, \quad \gamma_{r\theta} = 0$$

Полагаем, что при  $r = \rho$  деформации равны нулю, тогда  $C = A\rho^2$ . Находим

$$\epsilon_\theta = -\epsilon_r = -A \left( 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad \epsilon_\theta = 2 \left| \epsilon_\theta \right|$$

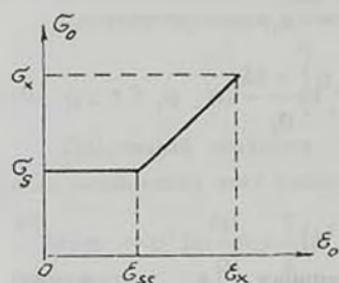
Это означает, что

$$\epsilon_\theta = \begin{cases} 2A \left( 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \geq \rho \\ -2A \left( 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) & \text{при } r \leq \rho \end{cases}$$

Когда лист целиком находится в состоянии текучести, т.е. до появления зон упрочнения, имеем  $\rho = \sqrt{ab}$ . Тогда легко заметить, что в состоянии текучести  $\epsilon_\theta$  принимает свое наибольшее значение во

внутренних полках  $r = a$ . Таким образом, зона упрочнения начинается распространяться с внутренней стороны при  $M > M_s = \sigma_s h^2 / 2$ , где  $h = b - a$ .

## 2. Одностороннее упрочнение



Фиг. 1

При  $M > M_s$  с внутренней стороны распространяется зона упрочнения (фиг.2). Тогда, учитывая, что

$$\sigma_s = \frac{\chi}{2}(\sigma_0 - \sigma_r), \quad \chi = \text{sign} \epsilon_0$$

будем иметь

$$\sigma_0 - \sigma_r = \begin{cases} -4AH \left( \frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) & \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \\ -\sigma_s & \text{при } \rho_1 \leq r \leq \rho \\ \sigma_s & \text{при } \rho \leq r \leq b \end{cases}$$

где  $r = \rho_1$  — границная цилиндрическая поверхность между зонами упрочнения и текучести. Значение  $\rho_1$ , а также и  $\rho$ , следует определять в ходе решения задачи

1) Решение в зоне упрочнения. Принимая

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 4AH \left( \frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right) \quad \text{при } a \leq r \leq \rho_1 \quad (2)$$

и подставляя в уравнения равновесия (1), которые при  $\tau_{r\theta} = 0$  примут вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3)$$

и интегрируем с учетом граничного условия  $\sigma_r = 0$  при  $r = a$ , находим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2AH \left( 2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \\ \sigma_\theta &= 2AH \left( 2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $A, \rho, \rho_1$  — неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести  $\rho_1 \leq r \leq \rho$ . Принимая в уравнении

(3)  $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_s$  и интегрируя, получаем

$$\sigma_r = B - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho$$

где  $B$  - произвольная постоянная. Используя условия непрерывности  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  на граничной поверхности  $r = \rho_1$ , находим выражения напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2AH \left( 2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} \\ \sigma_\theta &= 2AH \left( 2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho \quad (5)\end{aligned}$$

а также соотношение между параметрами

$$2AH \left( \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s \quad (6)$$

Неизвестные постоянные, содержащиеся в выражениях напряжений, определяется в дальнейшем.

3) *Решение в зоне текучести*  $\rho \leq r \leq b$ . Полагая в уравнении равновесия (3)  $\sigma_\theta - \sigma_r = 2\sigma_s$  и интегрируя с учетом граничного условия  $\sigma_r = 0$  при  $r = b$ , получаем

$$\sigma_r = -2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \sigma_\theta = 2\sigma_s - 2\sigma_s \ln \frac{b}{r}, \quad \rho \leq r \leq b \quad (7)$$

Условие непрерывности  $\sigma_r$  при  $r = \rho$  дает

$$AH \left( 2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{b\rho_1} \quad (8)$$

4) *Условие разрушения*. Когда на диаграмме  $\sigma_\theta$  приближается к значению  $\sigma_*$ , т.е. при временном сопротивлении материала, в листе появляется тенденция к разрушению. Условие  $\sigma_\theta = \sigma_*$  назовем интегральным условием разрушения или просто условием разрушения.

Принимая  $\sigma_\theta = \sigma_*$  на внутренних волокнах, т.е.  $\sigma_r - \sigma_\theta = 2\sigma_s$  при  $r = a$  из (2) получаем

$$A = \frac{\sigma_*}{2H \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \quad (9)$$

Далее, вводя обозначение  $\mu = \sigma_*/\sigma_s$  и подставляя значение  $A$  в уравнения (6) и (8), получаем

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \rho^2/a^2}} \quad (10)$$

$$2 \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \frac{\rho}{b} \frac{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}}{\sqrt{\mu}} = (\mu - 1) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + 2\mu \frac{\ln \frac{\rho}{a} \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu - 1 + \frac{\rho^2}{a^2}}} \quad (11)$$

Таким образом, для заданного значения  $\mu > 1$  из (11) определяется  $\rho$ , а из (10) значение  $\rho_1$ . Принимая в (11)  $\mu = 1$ , находим  $\rho = \sqrt{ab}$ , а из (10)  $\rho_1 = a$ .

Соответствующий изгибающий момент определяется формулой

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_0 r dr + \int_{\rho}^b \sigma_0 r dr$$

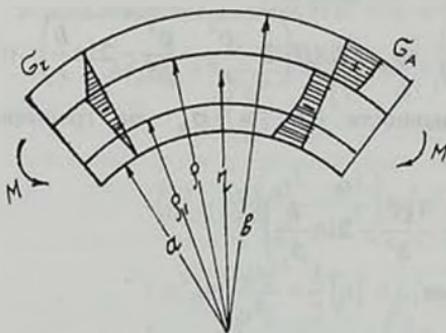
Подставляя значение  $A$  из (9) в формулы (4), (5), (7) для  $\sigma_0$ , после вычисления этих интегралов получим

$$M/\sigma_a = \rho^2 \ln \frac{b\rho_1}{\rho^2} + \frac{1}{2}(b^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) + \frac{\mu\rho^2}{2(\frac{\rho^2}{a^2} - 1)} \left( \frac{\rho_1^2}{\rho^2} - \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right)$$

Полученные формулы справедливы до значения  $\mu = \mu_1$ , при котором впервые на внешней волокне  $r = b$  появляются деформации упрочнения.

Значение  $\mu_1$ , а также соответствующие величины  $\rho_{10}$ ,  $\rho_0$  и  $M_1$  определяются в дальнейшем.

### 3. Двухстороннее упрочнение



Фиг. 2

1) Решение в зоне упрочнения  $a \leq r \leq \rho_1$ . Аналогичным образом получаем

$$\sigma_r = 2AH \left( 2 \ln \frac{r}{a} + \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \quad (12)$$

$$\sigma_\theta = 2AH \left( 2 + 2 \ln \frac{r}{a} - \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right) \quad a \leq r \leq \rho_1$$

где  $A$ ,  $\rho$ ,  $\rho_1$  - неизвестные постоянные.

2) Решение в зоне текучести  $\rho_1 \leq r \leq \rho$ . Для компонентов напряжений получаем

$$\sigma_r = 2AH \left( 2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_1 \ln \frac{r}{\rho_1}$$

При  $M > M_1$ , т.е. при  $\mu > \mu_1$ , с внешней стороны листа распространяется вторая зона упрочнения (фиг.2). Радиус этой граничной поверхности между зонами текучести и упрочнения обозначим через  $\rho_2$ .

$$\sigma_0 = 2AH \left( 2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2\sigma_s \ln \frac{r}{\rho_1} - 2\sigma_s, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho \quad (13)$$

Из условия непрерывности  $\sigma_0$  на граничной поверхности  $r = \rho_1$  находим

$$2AH \left( \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - 1 \right) = \sigma_s \quad (14)$$

3) Решение в зоне текучести  $\rho \leq r \leq \rho_2$ . Принимая в дифференциальном уравнении равновесия (3)  $\sigma_0 - \sigma_r = 2\sigma_s$  и интегрируя, будем иметь

$$\sigma_r = D - 2\sigma_s \ln \frac{\rho_2}{r}, \quad \sigma_0 = \sigma_r + 2\sigma_s \quad (15)$$

где  $D$  - произвольная постоянная.

4) Решение в зоне упрочнения  $\rho_2 \leq r \leq b$ . В этой зоне имеем

$$\sigma_0 = H\epsilon_0, \quad \text{т.е.} \quad \sigma_0 - \sigma_r = 4AH \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} \right)$$

Подставляя в уравнение (3) и интегрируя с использованием граничного условия  $\sigma_r = 0$  при  $r = b$ , получим

$$\sigma_r = 2AH \left( \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right), \quad \sigma_0 = 2AH \left( 2 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{r} \right) \quad (16)$$

Далее, из условия непрерывности  $\sigma_r$  и  $\sigma_0$  на граничной поверхности  $r = \rho_2$  определим

$$D = 2AH \left( \frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{b}{\rho_2} \right)$$

и соотношение между параметрами

$$2AH \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) = \sigma_s \quad (17)$$

Имеем также условие непрерывности  $\sigma_r$  на нейтральной поверхности  $r = \rho$ . Получим

$$AH \left( 2 \ln \frac{b \rho_1}{a \rho_2} + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} - \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} \right) = \sigma_s \ln \frac{\rho^2}{\rho_1 \rho_2}$$

Используя условие разрушения  $\sigma_0 = \sigma_s$ , для  $A$  находим значение согласно (9). Для радиусов граничных поверхностей получаем

$$\rho_i = \frac{\sqrt{\mu \rho}}{\sqrt{\mu \mp 1 \pm \rho^2/a^2}} \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

где верхние знаки для  $i = 1$ , а нижние для  $i = 2$ , а также уравнение нейтрального слоя

$$\mu \ln \frac{b^2}{a^2} \frac{\mu + 1 - \rho^2/a^2}{\mu - 1 + \rho^2/a^2} + (2 - \mu) \frac{\rho^2}{a^2} + \mu \frac{\rho^2}{b^2} =$$

$$= 2 + \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right) \ln \left[ 1 - \frac{1}{\mu^2} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2 \right] \quad (19)$$

Принимая в формуле  $\rho_2$  по (18)  $\mu = \mu_1$  при  $\rho_2 = b$ , получаем

$$\mu_1 = \frac{b^2 \rho_0^2 - a^2}{a^2 b^2 - \rho_0^2}$$

Далее, подставляя это значение  $\mu = \mu_1$  в (19) и полагая в нем  $\rho = \rho_0$ , находим уравнение относительно  $\rho_0$ .

Предельное положение нейтральной поверхности  $\rho = \rho_*$  получается из (19) предельным переходом при  $\mu \rightarrow \infty$

$$\rho_* = ab \sqrt{\frac{2 \ln \frac{b}{a}}{b^2 - a^2}}$$

Соответственно, из (18) при  $\mu \rightarrow \infty$  находим  $\rho_{1*} = \rho_{2*} = \rho_*$ .

Вычисляя изгибающий момент при  $\mu > \mu_1$

$$M = \int_a^{\rho_1} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_0 r dr + \int_{\rho}^{\rho_2} \sigma_0 r dr + \int_{\rho_2}^b \sigma_y r dr$$

с использованием формул (12), (13), (15), (16), получаем

$$\begin{aligned} M/\sigma_y = & \frac{\mu}{2 \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 1 \right)} \left[ \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) (\rho_1^2 - a^2) + \left( 1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right) (b^2 - \rho_2^2) + \right. \\ & \left. + (\rho^2 - \rho_1^2) \left( \frac{\rho^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + (\rho^2 - \rho_2^2) \left( \frac{\rho^2}{b^2} - \frac{\rho^2}{\rho_2^2} \right) \right] + \\ & + \rho^2 \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} + \frac{1}{2} (\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho^2) \end{aligned}$$

Определенный практический интерес представляет график функции  $M = M(\mu)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956. 408с.
2. Клошников В.В. Запредельное состояние пластинки с отверстием. — В межвуз. сб.: Статическая и динамическая прочность элементов машиностроительных констр. М.: ВЗМИ, 1986.
3. Клошников В.В. Упрочняющаяся пластинка под действием сосредоточенной силы. Деп.ВИНИТИ, 1986.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
1.02.1996