

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Манукян В.Ф.

Վ.Ֆ. Մանուկյան  
Միկրոբևեռ միջավայրում սահեղ մակերևութային ալիքների գոյության մասին

Զննարկվում է միկրոբևեռ կիսատարածությունում սահեղի հարթ մակերևութային ալիքների գոյության հարցը երկու ոչ սիմետրիկ մոդելներով՝ Ռոզուշիկովի կողմից առաջարկված մոդելով և Կոսսերայի մոդելով։ Ցուց է տրված, որ Ռոզուշիկովի մոդելով մակերևութային ալիք չի առաջանում։ Կոսսերայի մոդելի համար ստացվել են մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները

Manookian V. F.  
On the existence of surface shear waves in a micropolar medium

Рассматривается вопрос существования плоских сдвиговых поверхностных волн в полупространстве из микрополярного материала для двух несимметричных моделей. Показано, что при использовании модели Угодникова поверхностной сдвиговой волны не существует. Получено условие существования таких волн по модели Коссеры

Известно, что в классическом случае в полупространстве со свободной границей поверхностной SH волны не существует.

Задача исследуется для двух моделей: модели, предложенной Угодниковым [1,2] и теории микрополярной среды Коссеры [3,4]. Показано, что по модели Угодникова поверхностной сдвиговой волны не существует. При другой модели задача рассматривается в двух приближениях. Для этой модели получено условие существования поверхностной сдвиговой волны

1. Рассмотрим полупространство  $y \geq 0$ , которое занято континуумом по модели Угодникова [1] и предположим, что граница  $y = 0$  свободна от нагрузок. Пусть  $u_1 \equiv 0$ ,  $u_2 \equiv 0$ , а  $u_3 \equiv w(x, y, t)$ , где  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора смещения.

Уравнение движения имеет вид [1]

$$\mu \Delta w + J \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  — двухмерный оператор Лапласа, т. е.  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\mu$  — модуль

сдвига,  $\rho$  — плотность среды,  $J$  — динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении [4])

Решение уравнения (1.1) представим в виде

$$w = Ae^{-k\xi} \exp i(\omega t - kx) \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в уравнение движения (1.1), получаем следующее выражение:

$$\xi^2 = \frac{1 - (1 + \theta)\eta}{1 - \theta\eta} \quad (1.3)$$

$$\text{где } \eta = \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}, \quad \theta = \frac{Jk^2}{\rho}$$

Из (1.3) получаем условие затухания в виде

$$0 < \eta < \frac{1}{1 + \theta} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\theta} < \eta < \infty \quad (1.4)$$

Пренебрегая членом  $\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  на плоской границе  $y = 0$ , граничное условие примет вид [1]

$$\mu \frac{\partial w}{\partial y} + J \frac{\partial^2 w}{\partial t^2 \partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Подставляя (1.2) в (1.5), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$[(1 + \theta)\eta - 1](\theta\eta - 1) = 0$$

Это уравнение имеет два решения:  $\eta_1 = \frac{1}{1 + \theta}$  и  $\eta_2 = \frac{1}{\theta}$ .

Эти значения не удовлетворяют условию (1.4). Следовательно, по модели Угдичкова поверхностной волны не существует. Случай, когда  $\eta_1 = \frac{1}{1 + \theta}$ , дает предельную (объемную) волну. Значение  $\eta_2 = \frac{1}{\theta}$ ,

соответствует тривиальному случаю ( $w \equiv 0$ ).

2. О распространении поверхностной волны Рэлея в полупространстве из микрополярного материала посвящен раздел XXVI работы [3] А. Эррингена.

Рассмотрим вопрос о существовании поверхностной SH волны в рамках микрополярной теории Коссера. В этом случае имеем  $u_1 \equiv 0$ ,  $u_2 \equiv 0$ ,  $u_3 \equiv w(x, y, t)$ ,  $\varphi_2 \equiv 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, t)$ ,  $\varphi_3 = \varphi_3(x, y, t)$ , где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — компоненты вектора микровращения.

Уравнение движения теории микрополярной упругости имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
(\mu + \chi)\Delta w + \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\
(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \gamma \Delta \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} - 2\varepsilon \varphi_1 - \rho j \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} &= 0 \\
(\alpha + \beta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \gamma \Delta \varphi_2 - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} - 2\varepsilon \varphi_2 - \rho j \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  - дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярной упругости,  $j$  - мера инерции при вращении.

Рассмотрим волны, которые распространяются в направлении оси  $x$  с амплитудой, затухающей в направлении оси  $y$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A \exp(-k\xi y) \exp i(\omega t - kx) \\
\varphi_2 &= B \exp(-k\xi y) \exp i(\omega t - kx) \\
w &= C \exp(-k\xi y) \exp i(\omega t - kx)
\end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнения (2.1), получим однородную систему уравнений для  $A, B, C$ . Система будет иметь ненулевые решения, если его определитель равен нулю. Это даст

$$\begin{aligned}
&\left[ (\theta_1 + \theta_2 + \chi)(\xi^2 - 1) + \eta - \frac{2k_0^2}{k^2} \right] \left\{ \left[ \chi(\xi^2 - 1) + \eta - \frac{2k_0^2}{k^2} \right] \times \right. \\
&\left. \times [(1 - \nu)(\xi^2 - 1) + \eta] + \nu \frac{k_0^2}{k^2} (\xi^2 - 1) \right\} = 0
\end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\theta_1 \equiv \frac{\alpha}{j\mu}, \quad \theta_2 \equiv \frac{\beta}{j\mu}, \quad \chi \equiv \frac{\gamma}{j\mu}, \quad \nu \equiv \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad k_0^2 \equiv \frac{\varepsilon}{j\mu}, \quad \eta \equiv \frac{\rho\omega^2}{\mu k^2}.$$

Для поверхностных волн мы должны рассмотреть только случай положительных корней  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Решение (2.2) теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \sum_{k=1}^3 \lambda_k A_k \exp(-k\xi_k y) \exp i(\omega t - kx) \\
\varphi_2 &= \sum_{k=1}^3 \mu_k A_k \exp(-k\xi_k y) \exp i(\omega t - kx) \\
w &= \sum_{k=1}^3 \gamma_k A_k \exp(-k\xi_k y) \exp i(\omega t - kx)
\end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{(\mu + \varepsilon)(\xi_1^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2}{i\epsilon k(1 - \xi_1^2)}$$

$$\mu_1 = \frac{i}{\xi_1}, \mu_2 = i\xi_2, \mu_3 = i\xi_3, \frac{(\mu + \varepsilon)(\xi_1^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2}{i\epsilon k(1 - \xi_1^2)}$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \frac{i\epsilon k(1 - \xi_1^2)}{(\mu + \varepsilon)(\xi_1^2 - 1)k^2 + \rho\omega^2}, \gamma_3 = 1$$

Предполагая, что плоскость  $y=0$  свободна от напряжений, имеем условия [3]

$$(\mu + \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon \varphi_1 = 0, \quad \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + (\alpha + \beta + \gamma) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$$

Подстановка (2.4) в уравнение (2.5) приводит к однородным уравнениям относительно  $A_1, A_2, A_3$ . Из условия нетривальности решений этой системы получаем

$$\frac{\xi_2 - \xi_1}{(1 - \xi_1^2)[(1 + \nu)(\xi_2^2 - 1) + \eta]} \{ [(1 + \nu)(\xi_2^2 - 1) + \eta] \{ (1 + \nu)(\xi_1^2 - 1) + \eta \} \times \\ \times (\theta_2 + \chi)(\chi - \xi_2\xi_1) + \eta(-\xi_1\xi_2\xi_1(\theta_2 + \chi)^2(1 + \nu)(\xi_2 + \xi_1) + \\ + [-\theta_1 + (\theta_1 + \theta_2 + \chi)\xi_1^2] \{ (1 + \nu)\theta_2(1 + \xi_2\xi_1) + \chi\xi_2\xi_1 \times \\ \times (\xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2\xi_1 - 1) + \eta(\chi\xi_2\xi_1 - \theta_2) \} \} \} = 0 \quad (2.6)$$

Из (2.6) предполагаем, что  $\xi_2 = \xi_1 \neq 1$ , для  $\nu \ll 1$  получаем следующее дисперсионное выражение:

$$\eta \approx \frac{2k_0^2}{k^2(1 - \chi)} \quad (2.7)$$

Учитывая, что  $\xi_2 = \xi_1 > 0$ , будем иметь условие

$$0 < \eta < \frac{2(\chi + \frac{k_0^2}{k^2})}{\chi + 1} \quad (2.8)$$

Для существования поверхностной волны (2.7) необходимо удовлетворить условию (2.8), следовательно, имеем

$$k^2 > \frac{2k_0^2}{1 - \chi} \quad (2.9)$$

Таким образом, в приближении  $\nu \ll 1$  для существования волны

будем иметь условие (2.9) и  $\chi < 1$ . Корни  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  уравнения (2.3) в приближении  $\nu = 0$  имеют вид

$$\xi_1 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\theta_1 + \theta_2 + \chi}}, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\eta}{\chi}}, \quad \xi_3 = \sqrt{1 - \eta} \quad (2.10)$$

В таком приближении уравнение (2.6) имеет следующий вид:

$$L(\eta) = \nu \left\{ \frac{\eta(\theta_2 + \chi)(\xi_1 \xi_2 - \chi)(\chi - 1 - \nu)}{\chi(\xi_2 + \xi_1)} - \xi_1 \xi_2 \xi_3 (\theta_2 + \chi)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\theta_2(1 + \xi_2 \xi_1)(\theta_2 + \chi - \eta)}{\xi_2 + \xi_1} \right\} + \sqrt{1 - \eta}(\eta^2 - 2\eta(\theta_2 + \chi) + \\ + (\theta_2 + \chi)^2(1 - \xi_1 \xi_2)) = 0 \quad (2.11)$$

При  $\chi < 1$  из (2.10) получим условие  $0 < \eta < \chi$ . Легко показать, что это условие выполняется. Действительно, полагая  $\eta = 0$ , получаем  $L(0) = -\nu\chi(\theta_2 + \chi) < 0$ . С другой стороны, при  $\eta = \chi$  имеем  $L(\chi) = \frac{1 + \nu - \chi}{\sqrt{1 - \chi}}(\theta_2^2 + \nu\chi(\theta_2 + \chi)) > 0$ . Отсюда следует, что уравнение (2.11) имеет корень  $\eta$ , удовлетворяющий условию  $0 < \eta < \chi$ . При  $\chi > 1$  не всегда существует корень, удовлетворяющий условию затухания.

Сравним результаты, полученные на основе двух разных моделей. В случае, когда полупространство  $y \geq 0$  занято континуумом по модели Угодникова, поверхностной плоской SH-волны не существует. При исследовании задачи по модели Коссера такие волны при условиях (2.9) и  $\chi < 1$  существуют.

В заключение выражаю свою благодарность профессору М. В. Бедубекину за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Угодников А.Г. Об уравнениях динамики деформируемого твердого тела // ДАН СССР, 1991, т. 317, №1, с. 859-863.
2. Угодников А.Г. Моментная динамика линейно-упругого тела. Докл. РАН, 1995, т. 340, №1, с. 56-59.
3. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение. Т.2. М.: Изд. Мир, 1975, с. 646-751.
4. Повацкий В. Теория упругости. М.: Изд. Мир, 1975, с. 872.