

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ
НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СЛОИСТЫХ
ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА
ПРОЧНОСТЬ

Маркарян С.Э.

Ս.Է. Մարգարյան

Օճերտավոր թաղանթների և սալերի սկզբնական զրգռումների առավելագույն արժեքների
որոշումն ամրության սահմանափակման դեպքում

Լուծվում է օրթոտրոպ շերտերում թաղանթի անփոփոխ կշռի դեպքում կոմպոզիցիոն նյութի
թաղանթի շերտերի հաստության և մոնոշերտերի դասավորության անկյունների արժեքների
օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որոնք ապահովում են ամրության պայմանից սկզբնական
զրգռման (ճկվածքի կամ արագության) առավելագույն բույլատրելի արժեքը տրված
սկզբնական պայմաններով տատանումների դեպքում:

Զննարկվում է նաև բազմաշերտ սալի դեպքը

S.E. Margarian

Definition of maximum values of initial excitations of multilayer shells and
plates case of the limitation of strength

Решается задача оптимального выбора значений толщин слоев оболочки и углов
укладки монослоев композиционного материала в ортотропных слоях при неизменном
весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из условия прочности
максимальное значение начального возмущения (прогиба или скорости) при колебаниях
с заданными начальными условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру панель цилиндричес-
кой многослойной оболочки размерами a, b, h, R . Предполагается, что
слои оболочки симметрично расположены относительно срединной
поверхности $z=0$ и изготовлены из изотропного или ортотропного
композиционного материала.

Решается задача оптимального выбора значений толщин слоев обо-
лочки и углов укладки монослоев КМ в ортотропных слоях при неиз-
менном весе оболочки, обеспечивающих наибольшее допустимое из
условия прочности максимальное значение начального возмущения
(прогиба или скорости) при колебаниях с заданными начальными
условиями.

Рассматривается также случай многослойной пластинки. Приводятся результаты числовых расчетов для трехслойных оболочек и пластин при различных геометрических и физических параметрах.

1. Дифференциальные уравнения собственных колебаний многослойной оболочки имеют вид [1]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = 0$$

где $w(x, y, t)$ - функция прогибов, $\Phi(x, y, t)$ - функция усилий

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left(B_{ik}^{m+1} h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{ik}^s (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right)$$

$$C_{ik} = 2 \left(B_{ik}^{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m B_{ik}^s (h_s - h_{s+1}) \right)$$

$$a_{ik} = \frac{C_{ik}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{C_{66}}, \quad h_s = \frac{1}{2} \delta_{m+1} + \sum_{k=1}^m \delta_k$$

$$M = 2 \left[\rho_{m+1} h_{m+1} + \sum_{s=1}^m \rho_s (h_s - h_{s+1}) \right]$$

δ_s - толщина s -ого слоя оболочки, ρ_s - плотность материала s -ого слоя.

$2m+1$ - число слоев оболочки, B_{ik}^s - коэффициенты упругости s -ого слоя оболочки по ее главным геометрическим направлениям. Для слоев оболочки, изготовленных из монослоев КМ путем поочередной укладки под углом $\pm \varphi$ к оси Ox , коэффициенты B_{ik}^s выражаются через коэффициенты упругости монослоя B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Для слоев, изготовленных из изотропного материала $B_{11}^s = B_{22}^s = E_s / (1 - \nu_s)^2$, $B_{12}^s = \nu_s B_{11}^s$, $B_{66}^s = E_s / 2(1 + \nu_s)$, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона.

Начальные условия принимаются в виде

$$w|_{t=0} = -C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\chi C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

где C и χC - соответственно максимальные значения начального прогиба и скорости.

Функции прогибов и усилий, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания, принимаются в виде

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

$$\Phi = \Psi(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и условие (2), получается уравнение для определения функции $f(t)$

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (4)$$

с соответствующими начальными условиями

$$f(t)|_{t=0} = -C, \quad f'(t)|_{t=0} = -\chi C \quad (5)$$

и выражение для определения функции $\Psi(t)$

$$\Psi(t) = \frac{a^2}{\pi^2 R} \frac{f(t)}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}} \quad (6)$$

Низшая частота колебаний ω определяется из выражения

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho h} \left(D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{a^2}{b^2} + D_{22} \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4}{\pi^2 R^2} \frac{1}{a_{11} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{a^2}{b^2} + a_{22} \frac{a^4}{b^4}} \right) \quad (7)$$

Решения уравнения (4) с учетом (5) дает

$$f(t) = -C \left(\cos \omega t + \frac{\chi}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (8)$$

Подставляя (8) и (6) в (3), получается выражение для функций прогибов w и усилий $\phi(t)$.

Условие прочности для слоев оболочки записывается в виде

$$P(\sigma_{ik}^s) \leq 1, \quad (9)$$

Для ортотропных слоев из КМ принимается [2]

$$P(\sigma_{ik}^s) = \left(\frac{\sigma_{11}^s}{\sigma_{R1}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^s}{\sigma_{R2}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^s}{\tau_{R0}} \right)^2 - \frac{\sigma_{11}^s \sigma_{22}^s}{\sigma_{R1}^2}$$

где $\sigma_{R1}, \sigma_{R2}, \tau_{R0}$ — прочностные характеристики КМ, $\sigma_{11}^s, \sigma_{22}^s, \sigma_{12}^s$ — напряжения в s ом слое по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются по формулам

$$\sigma_{11}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{12}^0 e_{22}^s, \quad \sigma_{22}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{22}^0 e_{22}^s$$

$$\sigma_{12}^s = B_{66}^0 e_{12}^s$$

$e_{11}^s, e_{22}^s, e_{12}^s$ — деформации в s ом слое оболочки по направлениям укладки монослоев КМ, которые определяются через деформации

$e_{\alpha}, e_{\beta}, e_{\gamma}$ по главным геометрическим направлениям оболочки по известным формулам поворота [3].

Для изотропных слоев оболочки принимается

$$P(\sigma'_{ik}) = \frac{1}{[\sigma]^2} ((\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 - \sigma'_1 \sigma'_2)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение, σ'_1, σ'_2 — главные напряжения в s -ом слое оболочки, определяемые известными формулами [3] через напряжения $\sigma'_{\alpha\alpha}, \sigma'_{\beta\beta}, \sigma'_{\gamma\gamma}$ по главным геометрическим направлениям оболочки, которые, в свою очередь, определяются по формулам обобщенного закона Гука

$$\sigma'_{\alpha\alpha} = B'_{11}e_{\alpha\alpha} + B'_{12}e_{\beta\beta}, \quad \sigma'_{\beta\beta} = B'_{12}e_{\alpha\alpha} + B'_{22}e_{\beta\beta}, \quad \sigma'_{\gamma\gamma} = B'_{66}e_{\gamma\gamma}$$

Деформации в слоях оболочки по ее главным геометрическим направлениям выражаются через функции w и Φ по формулам

$$e_{\alpha\alpha} = a_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$e_{\beta\beta} = -a_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$e_{\gamma\gamma} = -a_{66} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Ставится задача определения оптимальных значений параметров δ_s и φ_s ($s = 1, 2, \dots, m+1$) оболочки, обеспечивающих наибольшее значение начального максимального возмущения (прогиба C или скорости χC) при неизменном весе оболочки и ограничениями на прочность.

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возмущения C , условие (9) можно представить в виде

$$P(\sigma'_{ik}) = C^2 \tilde{P}(\sigma'_{ik}) \leq 1$$

Из этого условия при заданном значении χ в наиболее опасной точке оболочки, в зависимости от вектора управления $\bar{x}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{m+1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m+1})$, определяется

$$C(\bar{x}) = \left[\max_{i,j,k} \tilde{P}(\sigma'_{ik}) \right]^{-1/2} \quad (10)$$

Вариированием значением вектора $\bar{x}$ определяется оптимальный проект оболочки, при котором начальное возмущение $C(\bar{x})$ достигает наибольшего значения при неизменном весе оболочки. Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C = \max C(\bar{x}) \quad (11)$$

при ограничениях

$$2 \sum_{m=1}^n \rho_m \delta_m + \rho_{m+1} \delta_{m+1} = \rho h, \quad 0 \leq \varphi_m \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

где ρ - плотность материала одного из слоев оболочки

Принимая при решении поставленной задачи, $\frac{1}{R} = 0$, получается случай многослойной пластинки

Численная реализация произведена для трехслойных оболочек при $k = b^2/Rh = 10$ и пластинки ($k = 0$) в случае, когда средний слой изготовлен из изотропного материала (титанового сплава) с характеристиками $B_{11}^{(2)} = 3,88 B_{11}^0$, $B_{12}^{(2)} = 1,16 B_{11}^0$, $B_{66}^{(2)} = 1,36 B_{11}^0$, $[\sigma] = 1,54 \cdot 10^{-3} B_{11}^0$ а наружные слои изготовлены из КМ (СВАМ 5 : 1) с характеристиками $B_{22}^0 = 0,62 B_{11}^0$, $B_{12}^0 = 0,12 B_{11}^0$, $B_{66}^0 = 0,16 B_{11}^0$, $\sigma_{B1} = 1,89 \cdot 10^{-3} B_{11}^0$, $\sigma_{B2} = 0,72 \cdot 10^{-3} B_{11}^0$, $\tau_{B0} = 0,5 \cdot 10^{-3} B_{11}^0$

Отношение плотностей материалов $\rho_2/\rho_1 = 2,38$.

Определены оптимальные значения параметров $\varphi, \alpha_1 = \delta_1/h$, $\alpha_2 = \delta_2/h$ и соответствующие значения начального приведенного прогиба $\bar{c} = C/h$ при $\bar{h} = h/b = 0,1$, $\bar{\chi} = \chi(12\rho h^4/\pi^4 B_{11}^0 h^2)^{1/2}$ для различных значений отношения сторон a/b .

Результаты расчета приведены в табл. 1. Там же для сравнения приведены значения $\bar{C}$ для однослойных оболочек, изготовленных из ортотропного материала (в круглых скобках) и ортотропного материала (в квадратных скобках).

Таблица 1

a : b	оболочка				пластинка			
	$\bar{c}$	φ^0	α_1	α_2	$\bar{c}$	φ	α_1	α_2
0,5	0,0562	0	0,45	0,04	0,0684	0	0,3	0,16
	(0,0283)				(0,0286)			
	[0,0552]				[0,0643]			
1,0	0,1423	0,90	0,4	0,08	0,2022	45	0,3	0,16
	(0,0744)				(0,1084)			
	[0,1376]				[0,1744]			
1,5	0,2776	90	0,45	0,04	0,3469	90	0,3	0,16
	(0,1149)				(0,1688)			
	[0,2209]				[0,2822]			
2,0	0,2907	90	0,45	0,04	0,4289	90	0,3	0,16
	(0,1511)				(0,1061)			
	[0,2795]				[0,3367]			

Как следует из табл.1, изготовление трехслойной пластинки позволяет увеличить допустимое значение начального прогиба по сравнению с изотропной однослойной пластинкой того же веса почти в 2 раза и по сравнению с ортотропной однослойной пластинкой до 27%.

В случае же трехслойной оболочки увеличение допустимого начального прогиба по сравнению с однослойной ортотропной оболочкой незначительно (до 4%), хотя по сравнению с изотропной однослойной оболочкой достигается значительный эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974, 448 с.
2. Бажанов З.Л., Гольденблат И.И. и др. Сопротивление стеклопластиков. М.: Машгиз, 1968.
3. Timoshenko S. P. and Goodier I.N. Theory of elasticity, ed mo Graw Hiu, New York, 1951.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.05.1996