

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГИВАЮЩИХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ ПО ВНУТРЕННЕМУ КОНТУРУ

Хачатрян А. А.

Ա. Ա. Խաչատրյան

Օղակաձև կլոր սալի կայունության մասին, երբ ներքին եզրում ազդում են ձգող ուժեր

Լուծված է օղակաձև կլոր սալի կայունության խնդիրը, որը զտնվում է ներքին եզրում ազդող հավասարաչափ բախշված ռադիալ ուղղությամբ ձգող ուժերի ազդեցության տակ, երբ սալը կորցնում է իր կայունությունը սիմետրիկ և անսիսիմետրիկ ձևերով: Դիտարկված է սալի արտաքին եզրագիծը ամրացման երկու դեպք՝ հողակապալին ամրացում և ամրակցում: Այդ դեպքերի համար ստացված են հավասարումներ, որտեղից որոշվում են կրիտիկական ուժի արժեքները կախված սալի ներքին ու արտաքին շառավիղների հարաբերությունից: Ոխումնասիրված են նաև ներքին եզրագծի ամրացման դեպքերը, որտեղ պարզվում է, որ այդ դեպքերում սալի կայունության կորուստ տեղի չունի:

A. A. Khachatrian

Stability of the circular ring plate under action of radial tension forces  
applied on the inner contour

Рассматривается задача об устойчивости круглой кольцевой пластины постоянной толщины, находящейся под действием растягивающих радиальных сил, равномерно распределенных по внутреннему контуру при двух случаях закрепления только внешнего контура и отдельно только внутреннего контура: шарнирное опирание и заделка. Получены соответствующие трансцендентные уравнения для определения критического значения силы и приведены результаты их исследования.

1. Рассмотрим круглую кольцевую пластинку с радиусами внешнего контура  $a$  и внутреннего контура  $b$ . Пластинка растягивается радиальными силами интенсивности  $P$ , равномерно распределенными по внутреннему контуру.

Уравнение устойчивости пластинки в полярных координатах имеет вид [1]

$$D\Delta\Delta w = -(T_r\chi_1 + T_\varphi\chi_2 + S\tau) \quad (1.1)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $w$  — прогиб,  $T_r$ ,  $T_\varphi$  и  $S$  — внутренние погонные усилия,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \chi_2 = -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad \tau = -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \quad (1.2)$$

В данном случае внутренние усилия имеют вид [2]

$$T_r = \frac{Pb^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \quad T_\varphi = -\frac{Pb^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{a^2}{r^2} + 1 \right), \quad S = 0 \quad (1.3)$$

В силу соотношений (1.2) и (1.3), уравнение (1.1) принимает вид

$$\Delta \Delta w + \alpha^2 \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \Delta w - \frac{2a^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (1.4)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{P\lambda^2}{(1 - \lambda^2)D}, \quad \lambda = \frac{b}{a} \quad (1.5)$$

Будем рассматривать два случая закрепления внешнего контура пластинки: шарнирное опирание и заделка.

В случае шарнирного опирания имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad w = 0, \quad M_r = 0 \\ \text{при } r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

а в случае заделки имеем

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \text{при } r = b \quad M_r = 0, \quad V_r = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь изгибающий момент  $M_r$  и обобщенная перерезывающая сила  $V_r$  имеют вид

$$\begin{aligned} M_r = -D \left[ (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \Delta w \right] \\ V_r = -D \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) + \frac{1 - \mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Для решения поставленной задачи следует решить уравнение (1.4) с учетом граничных условий (1.6) или (1.7). С этой целью из уравнения (1.4), после разделения переменных  $w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi$ , относительно  $W(r)$  получим

$$r^4 W^{IV} + 2r^3 W''' + [\alpha^2 r^2 - (\alpha^2 a^2 + 2n^2 + 1)]r^2 W'' + \\ + [\alpha^2 r^2 + (\alpha^2 a^2 + 2n^2 + 1)]rW' - n^2(\alpha^2 r^2 + \alpha^2 a^2 + 4 - n^2)W = 0 \quad (1.9)$$

или вводя новую переменную  $\alpha r = x$

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [v_n^2 + n(n-2)]\}x^2 W'' + \\ + \{x^2 + [v_n^2 + n(n-2)]\}xW' - n^2(x^2 + v_n^2 - 2n^2 - 2n + 3)W = 0 \quad (1.10)$$

где

$$v_n^2 = \delta^2 + (n+1)^2, \quad \delta = \alpha a \quad (1.11)$$

Нахождение общего решения уравнения (1.10) представляется невозможным при произвольном значении  $n$ . Однако исследование показывает, что при  $n = 0$  и  $n = 1$ , соответствующие осесимметричной и антисимметричной формам выпуклости пластинки, это уравнение допускает решение в квадратурах. Не будем рассматривать в отдельности случаи  $n = 0$  и  $n = 1$ , но с другой стороны получить общее решение уравнения (1.10) пригодное и для  $n = 0$  и  $n = 1$ , поступаем следующим образом.

Вместо уравнения (1.10) рассмотрим следующее уравнение:

$$x^4 W^{IV} + 2x^3 W''' + \{x^2 - [v_n^2 + n(n-2)]\}x^2 W'' + \\ + \{x^2 + [v_n^2 + n(n-2)]\}xW' - [(n^2 x^2 - n(n-2)(v_n^2 - 1))]W = 0 \quad (1.12)$$

которое, как нетрудно проверить, при  $n = 0$  и  $n = 1$  совпадает с уравнением (1.10). А уравнение (1.12) допускает решение в квадратурах при любом значении  $n$ . Действительно, вводя новую переменную

$$z = W' - \frac{n}{x}W \quad (1.13)$$

уравнение (1.12) приводится к виду

$$x[x^2 z'' + xz' + (x^2 - v_n^2)z] + (n-1)[x^2 z'' + xz' + (x^2 - v_n^2)z] = 0 \quad (1.14)$$

Отсюда находим

$$x^2 z'' + xz' + (x^2 - v_n^2)z = Cx^{1-n} \quad (1.15)$$

Общее решение уравнения (1.15) есть

$$z(x) = C_1 J_{v_n}(x) + C_2 Y_{v_n}(x) + \frac{\pi C}{2} \left[ Y_{v_n}(x) \int_{\lambda \delta}^x J_{v_n}(x) \frac{dx}{x^n} - J_{v_n}(x) \int_{\lambda \delta}^x Y_{v_n}(x) \frac{dx}{x^n} \right] \quad (1.16)$$

Теперь из уравнения (1.13), с учетом (1.16), будем иметь

$$W(x) = x^n \left\{ C_1 \int_{\lambda \delta}^x J_{v_n}(x) \frac{dx}{x^n} + C_2 \int_{\lambda \delta}^x Y_{v_n}(x) \frac{dx}{x^n} + \frac{\pi C}{2} \int_{\lambda \delta}^x \times \right.$$

$$\times \left[ Y_{\nu_n}(x) \int_{\lambda\delta}^x J_{\nu_n}(\eta) \frac{d\eta}{\eta^n} - J_{\nu_n}(x) \int_{\lambda\delta}^x Y_{\nu_n}(\eta) \frac{d\eta}{\eta^n} \right] \frac{dx}{x^n} + C_3 \Big\} \quad (1.17)$$

Таким образом, мы нашли общее решение уравнения (1.12) при произвольном значении  $n$ , которое одновременно является также решением уравнения (1.11), но только при  $n=0$  и  $n=1$ .

Учитывая выражение (1.13), из (1.8) для изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы получим

$$M_r = -D\alpha^3 \left[ z' + \frac{n+\mu}{x} z + n(n-1)(1-\mu) \frac{W}{x^2} \right] \cos n\varphi \quad (1.18)$$

$$V_r = -D\alpha^3 \left\{ z'' + \frac{n+1}{x} z' - [(1-\mu)n^2 + n + 1] \frac{z}{x^2} - n^2(n-1)(1-\mu) \frac{W}{x^3} \right\} \cos n\varphi$$

Граничные условия рассматриваемой задачи при учете, что  $n=0$  и  $n=1$ , после некоторых преобразований принимают следующий вид:

В случае заделки

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad W &= 0 \\ 2. \quad z &= 0 \\ 3. \quad xz + (n+\mu)z &= 0 \\ 4. \quad x^2 z'' - [(n+1)^2 + n^2 + \mu]z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x = \lambda\delta \quad (1.19)$$

а в случае шарнирного опирания имеем те же условия, кроме второго, которое заменяется условием

$$xz' + (n+\mu)z = 0 \quad \text{при } x = \delta \quad (1.20)$$

Удовлетворяя теперь указанным граничным условиям, получим системы однородных уравнений относительно постоянных интегрирования. Приравнявая нулю определители полученных систем, приходим к следующим трансцендентным уравнениям для определения критических значений сил:

в случае заделки

$$\frac{J_{\nu_n}(\delta)}{Y_{\nu_n}(\delta)} = \Phi(\lambda, \delta, n, \mu) \quad (1.21)$$

а в случае шарнирного опирания

$$\frac{\delta J_{\nu_{n-1}}(\delta) - (\nu_n - n - \mu) J_{\nu_n}(\delta)}{\delta Y_{\nu_{n-1}}(\delta) - (\nu_n - n - \mu) Y_{\nu_n}(\delta)} = \Phi(\lambda, \delta, n, \mu) \quad (1.22)$$

где

$$\Phi(\lambda, \delta, n, \mu) = \frac{\lambda \delta J_{v_0-1}(\lambda \delta) - (v_0 - n - \mu) J_{v_0}(\lambda \delta) + \lambda^{\mu-1} \delta^{\mu+1} (1 - \lambda^2) \int_{\lambda \delta}^{\delta} J_{v_0}(x) \frac{dx}{x^{\mu}}}{\lambda \delta Y_{v_0-1}(\lambda \delta) - (v_0 - n - \mu) Y_{v_0}(\lambda \delta) + \lambda^{\mu-1} \delta^{\mu+1} (1 - \lambda^2) \int_{\lambda \delta}^{\delta} Y_{v_0}(x) \frac{dx}{x^{\mu}}} \quad (1.23)$$

Сложность решения этих уравнений заключается в том, что неизвестная критическая сила находится как в индексе, так и в аргументе бесселевых функций. Для ее определения поступаем следующим образом: при фиксированных значениях  $n$  и  $\mu$  задаемся значением  $v_0$  и из выражения (1.11) определяем  $\delta$ . Затем вычисляем левые части уравнений (1.21) и (1.22). После этого определяем то значение  $\lambda$ , при котором правая часть уравнения становится равной найденному значению левой части. Тогда в силу соотношений (1.5) и (1.11) критическая сила будет определяться формулой

$$P_{cr} = \frac{D}{a^2} \left[ v_0^2 - (n+1)^2 \right] \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \quad (1.24)$$

Таким образом, задаваясь каждый раз значением  $v_0$ , определяем некоторое значение  $\lambda$  и соответствующее значение критической силы. Результаты некоторых вычислений приведены в табл. 1-4. Табл. 1, 2 относятся к случаю заделанной пластинки, а табл. 3, 4 - шарнирного опирания.

Таблица 1

| $n = 0$ | $\mu = 0,2$ |            | $\mu = 0,3$ |            |
|---------|-------------|------------|-------------|------------|
|         | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ |
| 1,5     | 0,1676      | 43,24      | 0,1936      | 32,10      |
| 1,6     | 0,2040      | 35,92      | 0,2293      | 28,11      |
| 1,7     | 0,2359      | 32,06      | 0,2602      | 26,02      |
| 1,8     | 0,2642      | 29,86      | 0,2873      | 24,89      |
| 1,9     | 0,2893      | 28,56      | 0,3114      | 24,04      |
| 2,0     | 0,3120      | 27,82      | 0,3330      | 24,05      |
| 3,0     | 0,4600      | 27,77      | 0,4739      | 27,62      |
| 4,0     | 0,5430      | 35,92      | 0,5526      | 34,11      |
| 5,0     | 0,5978      | 43,15      | 0,6055      | 41,46      |
| 6,0     | 0,6381      | 50,96      | 0,6443      | 49,30      |
| 7,0     | 0,6692      | 59,18      | 0,6744      | 57,56      |
| 8,0     | 0,6942      | 67,75      | 0,6986      | 66,09      |
| 9,0     | 0,7147      | 76,60      | 0,7186      | 74,92      |
| 10,0    | 0,7321      | 85,73      | 0,7355      | 84,02      |

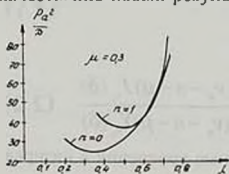
Таблица 2

| $n = 1$<br>$\nu_1$ | $\mu = 0,2$ |            | $\mu = 0,3$ |            |
|--------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                    | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ |
| 3,3                | 0,2734      | 82,26      | 0,3692      | 43,65      |
| 3,4                | 0,3344      | 60,06      | 0,3983      | 40,10      |
| 3,5                | 0,3717      | 51,45      | 0,4219      | 38,09      |
| 4,0                | 0,4745      | 41,28      | 0,5009      | 35,82      |
| 5,0                | 0,5714      | 43,52      | 0,5858      | 40,20      |
| 6,0                | 0,6263      | 49,57      | 0,6362      | 47,05      |
| 7,0                | 0,6641      | 57,03      | 0,6717      | 54,75      |
| 8,0                | 0,6925      | 65,11      | 0,6986      | 62,94      |
| 9,0                | 0,7150      | 73,61      | 0,7201      | 71,49      |
| 10,0               | 0,7335      | 82,43      | 0,7378      | 80,35      |

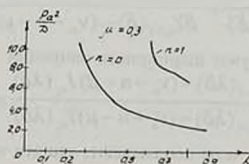
Таблица 3

| $n = 0$<br>$\nu_0$ | $\mu = 0,2$ |            | $\mu = 0,3$ |            |
|--------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                    | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ |
| 1,3                | 0,203       | 16,090     | 0,245       | 10,84      |
| 1,4                | 0,323       | 8,233      | 0,364       | 6,27       |
| 1,5                | 0,426       | 5,648      | 0,463       | 4,59       |
| 1,6                | 0,509       | 4,456      | 0,541       | 3,77       |
| 1,7                | 0,576       | 3,793      | 0,604       | 3,29       |
| 1,8                | 0,631       | 3,380      | 0,655       | 2,98       |
| 1,9                | 0,676       | 3,101      | 0,696       | 2,77       |
| 2,0                | 0,713       | 2,902      | 0,731       | 2,62       |
| 3,0                | 0,884       | 2,227      | 0,891       | 2,08       |

На основании приведенных выше таблиц построены графики зависимости величины  $Pa^2 / D$  от  $\lambda = b/a$ . На фиг. 1 представлена эта зависимость для заделанной пластинки, а на фиг. 2 при шарнирном ее опирании. В обоих случаях эти построения выполнены при  $\mu = 0,3$ . Отметим, что изменение коэффициента Пуассона не дает качественно новых результатов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Таблица 4

| $n = 1$<br>$v_1$ | $\mu = 0,2$ |            | $\mu = 0,3$ |            |
|------------------|-------------|------------|-------------|------------|
|                  | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ | $\lambda$   | $Pa^2 / D$ |
| 3,2              | 0,515       | 17,25      | 0,604       | 10,85      |
| 3,3              | 0,583       | 13,37      | 0,618       | 9,50       |
| 3,4              | 0,631       | 11,45      | 0,626       | 8,63       |
| 3,5              | 0,668       | 10,25      | 0,712       | 8,01       |
| 3,6              | 0,698       | 9,43       | 0,737       | 7,55       |
| 3,7              | 0,723       | 8,83       | 0,757       | 7,19       |
| 3,8              | 0,745       | 8,37       | 0,775       | 6,90       |
| 3,9              | 0,764       | 8,00       | 0,792       | 6,67       |
| 4,0              | 0,780       | 7,70       | 0,805       | 6,48       |

Как видно из фиг. 1, для защемленной пластинки при малых значениях  $\lambda$  критическая сила в случае осесимметричного выпучивания ( $n=0$ ) меньше соответствующего значения при  $n=1$  и наименьшее значение ее достигается при  $\lambda \approx 0,35$ . Однако при больших значениях  $\lambda$ , когда  $\lambda > 0,62$ , критическая сила при антисимметричной форме выпучивания ( $n=1$ ) становится меньше соответствующего значения ее для  $n=0$ .

В случае же шарнирного закрепления, как видно из фиг. 2, потеря устойчивости пластинки происходит только по осесимметричной форме ( $n=0$ ).

2. Рассмотрим теперь ту же задачу с той разницей, что закрепление пластинки производится не по внешнему контуру ( $r=a$ ), как было выше, а по внутреннему контуру ( $r=b$ ). Эта задача решается аналогично предыдущей с заменой местами  $a$  и  $b$  в граничных условиях (1.6) и (1.7), поэтому нет необходимости приводить весь ход ее решения. Отметим только, что в результате ее решения, для определения критического значения силы, получаем следующие трансцендентные уравнения:

в случае заделки

$$\frac{J_{v_n}(\lambda\delta)}{Y_{v_n}(\lambda\delta)} = \frac{\delta J_{v_n-1}(\delta) - (v_n - n - \mu)J_{v_n}(\delta)}{\delta Y_{v_n-1}(\delta) - (v_n - n - \mu)Y_{v_n}(\delta)} \quad (2.1)$$

а в случае шарнирного опирания

$$\frac{\lambda \delta J_{v_n-1}(\lambda\delta) - (v_n - n - \mu)J_{v_n}(\lambda\delta)}{\lambda \delta Y_{v_n-1}(\lambda\delta) - (v_n - n - \mu)Y_{v_n}(\lambda\delta)} = \frac{\delta J_{v_n-1}(\delta) - (v_n - n - \mu)J_{v_n}(\delta)}{\delta Y_{v_n-1}(\delta) - (v_n - n - \mu)Y_{v_n}(\delta)} \quad (2.2)$$

Расчеты показывают, что эти трансцендентные уравнения в интервала

ле  $0 < \lambda < 1$  не имеют корней. Это говорит о том, что и случае закрепления внутреннего контура пластинки, она не теряет устойчивости ни при каких значениях силы  $P$ .

В заключение считаю необходимым отметить, что настоящее исследование выполнено согласно договору с фирмой "Анушк".

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хачатрян А. А. Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. Изв. АН АрмССР, Механика, 1966, т. 19, №6, с. 9-16.
2. Биценко К. Б. и Грамель Р. Техническая динамика, т. 1. М.: Л.: Гостехиздат, 1950. 900 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
17.03.1995