ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

К ПРОБЛЕМЕ ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Белубекян М.В., Минасян М.М.

Մ.Վ.Բելուբեկյան, Մ.Մ. Մինասյան
Գերձայնային գազի հոսանքում սալի ֆլատերի խնդրի մասին

Կառուցվում է նոր մոտավորություն, որը ինչպես ցույց է տրվում աշխատանքում, հանդիսանում է միջանկյալ ճշգրիտ դրվածքով խնդրի և «մխոցային» տեսության միջև. Ելնելով գծային խնդրի լրիվ համակարգից և օգտագործելով գերձայնային ասիմպտոտիկ վերլուծության երկրորդ մոտավորությունը, սալի լայնական տեղափոխումների համար ստացված է որոշիչ հավասարումը, որը ավելի բարձր կարգի է, քան «մխոցային » տեսության համապատասխանող հավասարումը:

Ցույց է տրված, որ այդ լրացումը կարող է բերել արդյունքների որակորեն փոփոխություններ. Որպես օրինակ, դիտարկված է անվերջ սալի ֆլատերի խնդիրը

M. V. Belubekian, M. M. Minasian
On the flutter problem of plates in the supersonic gas flow

В данной работе строится новое приближение в задаче о панельном флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке идеального газа. Из общих соотношений выводится система двух дифференциальных уравнений для избыточного давления и прогиба пластинки. По точности это приближение является промежуточным между исходной системой, представляющей взаимодействие газодинамического поля с пластинкой и уравнением для прогиба пластинки, соответствующим "поршневому" приближению

§ 1. Введение

По существу, предлагаемое приближение можно трактовать как второе приближение в асимптотическом разложении, первое в котором соответствует "поршневой" теории. Как показано в работе, предлагаемое приближение вносит качественное изменение в "поршневой" теории и сохраняет главные особенности исходной задачи, утерянные в первом приближении.

В работе отсутствует обзор работ по исследуемой теме, по которой имеется обширная библиография. Авторы ограничились только работами [1,2,3], в которых можно найти все известные результаты, использованные в данной работе. Естественно, авторы не претендуют на оригинальность этих результатов, хотя и некоторые из них получили несколько иное толкование, чем в первоисточниках.

§ 2. Постановка задачи

Допустим, пластинка занимает односвязную область D в плоскости (x, y) и вдоль оси x обтекается сверхзвуковым потоком идеального газа. Рассматривается одностороннее обтекание $(z > 0)$. Край пластинки закреплен жесткой диафрагмой, простирающей вне D до бесконечности.

Тогда имеем задачу:

$$\frac{D^2\varphi}{Dt^2} = a_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \Delta_\perp\varphi\right) \quad (z > 0) \tag{2.1}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -pa_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \Delta_\perp\varphi\right) \quad (z \geq 0) \tag{2.2}$$

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)W + \delta p = 0 \quad (z = 0, x, y \in D) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{DW}{Dt} \qquad \begin{matrix} (z = 0, x, y \in D) \\ (W = 0, x, y \overline{\in} D) \end{matrix} \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ - возмущенный потенциал течения, $\delta p(x, y, t) = p(x, y, 0, t)$ - избыточное давление на пластинку, a_0 невозмущенная скорость звука в потоке, ρ_0 плотность газа, U - скорость обтекания, $W(x, y, t)$ прогиб пластинки и L -оператор движения ненагруженной пластинки в вакууме.

Заметим, что связанную систему поток-пластинка из нейтрального и невозмущенного начального состояния $\varphi = 0$, $W = 0$ можно вывести либо возмутив течение, либо пластинку, либо и то и другое одновременно. Это подчеркивается в связи с тем, что предложенный в работе подход подразумевает вывести такое приближение для движения пластинки, чтобы сохранить возможность перечисленных возмущений. Данное означает, что уравнение для прогиба должно иметь порядок по t выше, чем оператор L. О порядке по пространственной координате будет сказано ниже.

Поскольку задача (2.1), (2.2) и (2.4) линейная, то можно применить либо метод элементарных решений, либо метод интегральных преобразований. Мы здесь даем предпочтение второму подходу, как наиболее естественному, имея в виду, что вопрос устойчивости все таки задача о начальном возмущении. Считаем уместным процитировать К.М.Кэйза [4]: "Основной момент заключается не в том, что мы не можем найти решения методом элементарных решений, а скорее в том, что мы не можем их пропустить, решая задачу с начальными данными"

Исходя из вышесказанного, в ситуациях, требующих разъяснения для обоснования того и иного утверждения, будем обращаться к соотно шениям, базирующимся на интегральные преобразования

Будем применять преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по x и y. Для простоты рассмотрим начальную задачу

$$W = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Для произвольной функции $F(x, y, z, t)$ будем иметь

$$F(x,y,z,t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y \int_{\gamma_\omega} f(k_x, k_y, z, \omega) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} d\omega \qquad (2.5)$$

где γ_ω прямая в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω, параллельная действительной оси и расположенная ниже всех особен ностей изображения $f(k_x, k_y, \omega, z)$.

Применив преобразование (2.5) к уравнению (2.1), для изображения $\overline{\varphi}$ получим уравнение

$$\frac{d^2\overline{\varphi}}{dz^2} + \xi^2 \overline{\varphi} = 0, \quad \xi^2 = \left(\frac{\omega - U_x}{a_0} \right)^2 - k_1^2 \qquad (2.6)$$

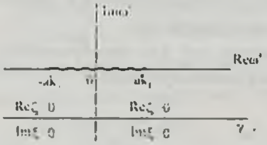
$(k \equiv k_x,\ k_1^2 = k_x^2 + k_y^2)$

Решение (2.6) с учетом граничного условия из (2.4) имеет вид

$$\overline{\varphi}(k_x, k_y, \omega, z) = -\frac{\omega - U_k}{\xi} \overline{W}(k_x, k_y, \omega) e^{-i\xi z} \qquad (2.7)$$

Решение (2.7) известно, его можно получить также методом элементарных решений [3]. Преимущество интегрального представления становится очевидным уже на этом начальном этапе. Если в методе элементарных решений для ограниченности решения по z требуется выполнение условия $\mathrm{Im}\xi < 0$, то для условия излучения следует провести дополнительный анализ. Между тем, в интегральном представлении условия ограниченности и излучения выполняются одновременно одним лишь выбором ветви ξ в комплексной плоскости $\omega' = \omega - Uk$, полученной сдвигом плоскости ω вдоль действительной оси (ясно, что при таком сдвиге не нарушается условие аналитичности $\overline{\varphi}$). Частота ω' трактуется как результат перехода к подвижной системе, в которой поток неподвижен (Доплер).

Действительно, проведя разрез в плоскости ω', соединяющей точки $\omega' = \pm a k_1$ (фиг.1) и выбрав ветвь ξ таким образом, чтобы на действительной оси при $\omega' > a k_1$ ξ принимало положительные действительные значения (при $\omega' > -a k_1$ -отрицательные), легко показать, что на линии γ'_ω выполняется условие $\pi < \arg \xi < 0$ и, кроме того, на той же линии $\mathrm{Re}\,\xi$ и $\mathrm{Re}\,\omega'$ имеют одинаковый знак, т.е. $\mathrm{Re}\,\xi \cdot \mathrm{Re}\,\omega' > 0$. Тогда экспоненциальный множитель в (2.5) примет вид



Фиг.1

$$\exp\left[i(\omega' t - \xi z)\right] \exp ik_1 (Ut - x) \exp(-ik_1 y),$$

где первый множитель обеспечивает одновременно и затухание решения при $z \to \infty$, и условие излучения в виде уходящих от пластинки волн без включения иных дополнительных условий.

Следующим этапом в решении проблемы флаттера является определение избыточного давления δp с последующим исследованием задачи на основе уравнения пластинки (2.3).

Следуя известному (см. напр. [1]) методу и используя решение (2.6) и интеграл Лагранжа (следствие из (2.1) и (2.2)), для W можно получить одно однородное интегро-дифференциальное уравнение того же порядка, что и оператора L.

Считается, что это уравнение является наиболее точным в рамках поставленной задачи и его можно применить для пластинок любой протяженности. Однако, как нам кажется, при этом могут ущемляться некоторые граничные и начальные условия в случае конечных и полубесконечных пластинок.

На основе интегро-дифференциального уравнения для различных операторов L для пластинки решены многочисленные задачи, имеющие приближенный характер особенно для конечных тел.

Учитывая сложность таких задач, были предложены различные методы определения избыточного давления, которые существенно упрощали исследования. Среди этих методов особо выделяется своей простотой метод "плоских сечений" или, как принято называть, "поршневая теория", согласно которой

$$\delta p = \rho_0 a_0 \frac{DW}{Dt} \tag{2.8}$$

с различными модификациями в коэффициенте в правой части. Как известно, соотношение (2.8) позволяет легко решить много интересных задач о сверхзвуковом обтекании тонких конструкций .

Однако, (2.8) обладает рядом неисправимых дефектов. Во-первых, это связано с потерей некоторых начальных условий о возмущении пластинки потоком, как отмечалось выше. Другое обстоятельство связано с потерей волны газодинамического характера, которая приводит к обрыву взаимодействия между потоком и пластинкой. Чтобы показать это, еще раз обратимся к решению (2.7).

В пространстве изображений, после определения δp из уравнения (2.3) для функции $\overline{W}(k_x, k_y, \omega)$ получим (в случае бесконечной пластинки и линейного оператора L)

$$\overline{W}(k_x, k_y, \omega) = \frac{\xi(k_x, k_y, \omega)\Phi}{L(i\omega, -ik_x, -ik_y)\xi + i\rho_0(\omega - Uk_x)^2} \tag{2.9}$$

где функция определяется начальными условиями.

"Поршневое" приближение соответствует отбрасыванию k_y^2 в выражении для ξ, т. е. $\omega - Uk_x = a\xi$. Тогда множитель $\omega - Uk_x$ выделяется в знаменателе (2.9) и сокращается с ξ в числителе, что и порождает разрыв.

Важным недостатком (2.8) является то, что оно носит локальный характер (избыточное давление зависит от местных условий на пластинке), в то время как истинное соотношение носит нелокальный характер. Имея в виду также возможные граничные условия на краях пластинки, кроме условий закреплений, можно прийти к заключению, что если для прогиба W надо вывести дифференциальное уравнение, то оно должно иметь выше, чем оператор L, порядок.

§3. Вывод дифференциальных уравнений

Известно, что одно из предположений, на котором базируется "поршневая" теория, это то, что при больших сверхзвуковых скоростях обтекания потенциал течения намного быстро меняется в направлении оси z, чем в горизонтальных направлениях, т. е. имеет место

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} >> \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{3.1}$$

Исходя из этого, построим последовательное приближение для определения потенциала φ, начав с задачи

$$\frac{D^2\varphi_0}{Dt^2} = a_0^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} \qquad z > 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}=\frac{DW}{Dt} \qquad z=0 \tag{3.3}$$

Решение этой задачи в изображениях будет

$$\overline{\varphi}_0=-a_0\overline{W}\exp(-i\xi z) \quad \left(\xi=\frac{\omega-Uk}{a_0}\right) \tag{3.4}$$

Вычисление избыточного давления по формуле $\delta p=-\rho_0\dfrac{D\varphi_0}{Dt}$ при $z=0$ даст (2.8). Если же приложить формулу (2.2) при $z=0$ и $\varphi=\varphi_0$ получим

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.5}$$

Более строгий и последовательный подход требует определения φ в следующем приближении. Тогда для второго приближения вместо задачи (3.2) и (3.5) будем иметь задачу

$$\frac{D^2\varphi_1}{Dt^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\Delta_\perp\varphi_0\right) \qquad z>0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{DW}{Dt} \qquad z=0 \tag{3.7}$$

Решение этой задачи в изображениях будет

$$\overline{\varphi}_1=-a_0\overline{W}\left[1+\frac{k_\perp^2}{2\xi^2}+\frac{k_\perp^2 iz}{2\xi}\right]e^{i\xi z} \tag{3.8}$$

Из (3.8) при $z=0$ получим

$$\frac{D^2\varphi_1}{Dt^2}=-a_0\left(\frac{\partial^2W}{\partial z^2}-\frac{a_0^2}{2}\Delta_\perp W\right) \tag{3.9}$$

откуда для давления вместо (3.5) будем иметь

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\frac{1}{2}\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.10}$$

Поскольку (3.5) и (3.6) отличаются лишь коэффициентом во втором слагаемом, то в дальнейшем формулу для давления представим в виде

$$\frac{Dp}{Dt}=\rho_0 a_0\frac{D^2W}{Dt^2}+\nu\rho_0 a_0^3\Delta_\perp W \tag{3.11}$$

с расчетом на то, что коэффициент ν можно определить из условия лучшего согласования с результатами, полученными в точной постановке.

Таким образом, для функций давления на пластинке p и прогиба пластинки W имеем систему уравнений (2.3) и (3.11). Исключая давление, для одной функции W получим уравнение

$$\frac{D}{Dt}\left(L+\rho_0 a_0 \frac{D}{Dt}\right)W(x,y,t) = -v\rho_0 a_0^3 \Delta_\perp W \tag{3.12}$$

Вывод этого уравнения и является основным результатом данной работы.

Отметим, что оператор в скобках (3.12) соответствует "поршневой" теории.

Как видно, уравнение (3.12) имеет порядок по t и x на единицу выше, чем L и благодаря этому может удовлетворять большим начальным и граничным условиям.

Оператор L для пластинок обычно четного порядка по x. Тогда уравнение (3.12) будет нечётного порядка и это приведет к некоторой неравноправности передних и задних кромок по x в случае конечной пластинки. Это обстоятельство следует считать естественным. Например, в случае, когда оператор L гиперболический (мембрана, приближение Тимошенко и т. д.), то из-за оператора $\frac{D}{Dt}$ число входящих характеристик через границу $x=0$ увеличивается на единицу, что приводит к дополнительному граничному условию на передней кромке.

Вопрос конкретизаций всех граничных условий зависит от конкретного вида L и не является предметом настоящего исследования.

Ниже, чтобы выяснить пределы применимости и степень точности уравнения (3.12), рассмотрим задачу, имеющую точное решение.

§4. Устойчивость бесконечной пластинки в двумерном сверхзвуковом газе

В рассматриваемой задаче выберем опреатор L в известном виде [1,3].

$$L = \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2} - N\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho h\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t} + k_t W \tag{4.1}$$

Дисперсионное уравнение для уравнения (3.12) примет вид

$$(\omega - Uk)(\omega^2 - c^2k^2 + i\varepsilon_0 Uk - i\gamma\omega) = 0 \tag{4.2}$$

где

$$c^2 = \frac{N}{\rho h} + \frac{Dk^2}{\rho h} + \frac{k_f}{k^2 \rho h}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h}$$

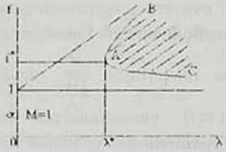
$$\gamma = \varepsilon_0 + \varepsilon, \qquad \delta = k\frac{\rho_0 a_0^3}{\rho h}$$

Чтобы найти границы устойчивости, применим обобщенный принцип Рауса-Гурвица (5). Число корней в нижней полуплоскости ω для уравнения (4.2) равно числу перемен знака в ряду

$$1; \gamma; k^2\left[(\gamma^2 c^2 - \varepsilon_0^2 U^2) + 8\gamma\right]$$
$$\delta k^6\left[U^2 c^2 (\varepsilon_0 + \gamma)^2 - (\varepsilon_0 U^2 + \gamma c^2 + \delta)^2\right] \qquad (4.3)$$

Для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы имела место система неравенств

$$\gamma^2 c^2 - \varepsilon_0^2 U^2 + \delta\gamma > 0$$
$$Uc(\varepsilon_0 + \gamma) > \varepsilon_0 U^2 + \gamma c^2 + \delta \qquad (4.4)$$



Фиг.2

Решение системы (4.4) представлено на фиг.2. Заштрихованная область представляет устойчивую зону. Если принять обозначения

$$f = \frac{U}{c}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = 1 + \lambda, \quad a^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

то для определения ветвей AB и AC получим уравнение

$$(f - 1)\left[f - (1 + \lambda)\right] + a^2 k = 0 \qquad (4.5)$$

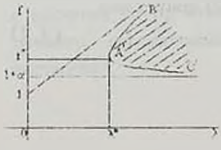
Решение (4.5)

$$f = 1 + \frac{\lambda}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k\alpha^2}{\lambda^2}}\right] \qquad (4.6)$$

сравним с известным решением [3], которое в обозначениях, принятых здесь, имеет вид

$$f = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\lambda^2}}} \qquad (4.7)$$

На фиг.3 представлена область устойчивости, соответствующая (4.7).



Фиг.3

Это сравнение показывает качественное сходство областей устойчивости. При больших $\lambda > 2a$ верхние ветви практически неразличимы. Выбрав коэффициент $k = 2(\sqrt{2} - 1)$, точка A' будет лежать на верхней ветви решения (4.6). Тогда можно заключить, что при $f > 1+\sqrt{2\alpha}$, или, $M > \sqrt{2}+\frac{1}{\alpha}$ (M число Маха) ооласти устойчивостей, вычисленные по точной постановке и по предложенному здесь приближению, с большой точностью совпадают.

Заметим, что для всех длин волн имеет место оценка $c^2 \geq c_0^2 + \sqrt{\frac{4Dk_*}{\rho h}}$, которая для данной скорости звука в газе a_0 дает верхнюю оценку для α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчи вости М: Физматгиз, 1961
2. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. "Механика деформи руемого твердого тела". Итоги науки и техники. 1978, II, с. 67 122.
3. Kornecki A. Aeroelastic and hydroeiastic instabilities of infinitely long plates. II. SM Archivies, Vol 4. Issue 4. 1979, pp. 241 343.
4. Кэйз К.М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальны ми данными. Гидродинамическая устойчивость. М.: Изд-во "Мир", 1964, стр. 37-46.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию
19.09.1995