ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 2, 1997 Механика

ТЕРМОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНКИ

Саркисян В.С., Кутузян Н.А.

Վ. Ս. Սարգսյան, Ն. Ա. Կուտուզյան

Օրթոտրոպ սեպաձև սալի համար ջերմաառաձգականության խնդիր

Դիտարկված է ջերմաառաձգականության խնդիր օրթոտրոպ սեպաձև սալի համար, երբ ջերմահաղորդականության գլխավոր առանցքները համընկնում են անիզոտրոպիայի գլխավոր առանցքների հետ: Հաշված են լարումները և մյուս մեխանիկական մեծությունները և հետազոտված է նրանց վարքը սեպի գագաթին մոտենալիս

V. S. Sarkissian, N. A. Kutusian

Thermoelasticity problem for the orthotropical wedge plate

Рассматривается термоупругая задача для клиновидной ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией. Вычисляются напряжения, моменты и перерезывающие силы и исследуется характер их величин около вершины клина

Рассматривается термоупругая задача для клиновидной ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией. Пусть ортотропная клиновидная пластинка постоянной толщины h отнесена к цилиндрической системе координат r, φ, z, оси которой являются главными осями проводимости. Решается задача теплопроводности, когда на краях пластинки $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$ задана постоянная температура T_1, а по толщине температура меняется по линейному закону [1]

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} z \qquad (1)$$

Пусть среда, омывающая тонкую пластинку, имеет разные температуры θ_3, θ_4, соответственно, на поверхностях $z = \frac{h}{2}$, $z = -\frac{h}{2}$. Допустим, что на этих поверхностях происходит конвективный стационарный теплообмен между средой, предположим, что теплообмен на обеих поверхностях совершается при одинаковых коэффициентах теплоотдачи. Тогда для определения температуры имеем систему [2]

$$K_{11}\frac{\partial^2\theta^{(0)}}{\partial r^2}+\frac{K_{11}}{r}\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial r}+\frac{K_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\theta^{(0)}}{\partial\varphi^2}-\frac{2a}{h}(\theta^{(0)}+T_0-\bar{\theta})=0$$

$$K_{11}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{K_{11}}{r}\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial r}+\frac{K_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\theta^{(1)}}{\partial\varphi^2}-\frac{6}{h^2}(2K_{33}+ah)\times \tag{2}$$

$$\times\left(\theta^{(1)}-\frac{a}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right)=0$$

граничные условия

$T=T_1$ при $\varphi=0$

$T=T_1$ при $\varphi=\alpha$

Здесь $\theta=T-T_0$ есть приращение температуры пластинки относительно начальной температуры T_0, а $\bar{\theta}=\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}$.

Общее решение первого уравнения системы (2) будет

$$\theta^{(0)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{C_{1m}I_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+C_{2m}K_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+\bar{\theta}-T_0\right\}\sin\nu_m\varphi+T_1-T_0$$

$$P_m=\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}\nu_m,\quad \nu_m=\frac{\pi m}{\alpha} \tag{3}$$

α есть раствор клина, а $K_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ коэффициент теплопроводности.

Решение второго уравнения системы (2)

$$\theta^{(1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{3k}I_{P_k}(cr)+C_{4k}K_{P_k}(cr)+\frac{a}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right\}\sin\nu_k\varphi \tag{4}$$

где $c=\sqrt{\dfrac{6(2K_{33}+ah)}{h^2K_{11}}}$

Так получим для θ следующее:

$$\theta=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{C_{1m}I_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+C_{2m}K_{P_m}\left(\sqrt{\frac{2a}{hK_{11}}}r\right)+\bar{\theta}-T_0\right\}\sin\nu_m\varphi+$$

$$+Z\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{3k}I_{P_k}(cr)+C_{4k}K_{P_k}(cr)+\frac{ah}{2K_{33}+ah}(\theta_3-\theta_4)\right\}\sin\nu_k\varphi+ \tag{5}$$

$$+T_1-T_0$$

Здесь функции $I_p(r)$ есть бесселева функция первого рода, а функция $K_p(r)$ – функция Макдональда, которая также является действительной при любом действительном P. Имея $T(r,\varphi)$, приступим к решению задач термоупругости. На основании гипотезы прямых нормалей и обобщенного закона Гука, условием термоупругого равновесия однородной, ортотропной пластинки, является следующее дифференциальное уравнение относительно прогиба $W(r,\varphi)$ [1].

$$
\begin{aligned}
&D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial r^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial\varphi^4}+2D\frac{D_{11}}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}-\\
&-2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 W}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{D_{22}}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+2(D_{12}+2D_{66}+D_{22})\frac{1}{r^4}\times\\
&\times\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^3}\frac{\partial W}{\partial r}=-\beta_1\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2}-\beta_2\frac{\partial^2 M_T}{\partial\varphi^2}-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{\partial M_T}{\partial r}-\\
&-2\frac{\beta_{12}}{r}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2\beta_{12}}{r^2}\frac{\partial M_T}{\partial\varphi}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

с граничными условиями

$$
W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=-\beta_2 r^2\frac{h^2}{D_{22}\cdot 6}T_0 \quad \text{при}\quad \varphi=0,\ \varphi=\alpha \tag{7}
$$

Здесь $M_T=M_T(r,\varphi)=\int\limits_{-h/2}^{h/2} zT(r,\varphi,z)dz$

Введя новую функцию

$$
\tilde{W}(r,\varphi)=W+\beta_2 r^2 T_0\frac{h^2}{D_{22}\cdot 3}\varphi(\varphi-\alpha) \tag{8}
$$

для определения $\tilde{W}(r,\varphi)$ будем иметь следующее уравнение:

$$
\begin{aligned}
&D_{11}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial r^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^4}\frac{\partial^4\tilde{W}}{\partial\varphi^4}+2\frac{D_{11}}{r}\times\\
&\times\frac{\partial^3\tilde{W}}{\partial r^3}-2(D_{12}+2D_{66})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\tilde{W}}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{D_{22}}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial r^2}+2(D_{12}+2D_{66}+\\
&+D_{22})\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2\tilde{W}}{\partial\varphi^2}+\frac{D_{22}}{r^3}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial r}=-\beta_1\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2}-\beta_2\frac{\partial^2 M_T}{\partial\varphi^2}-\\
&-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r\partial\varphi}-\frac{2\beta_{12}}{r^2}\frac{\partial M_T}{\partial\varphi}+4\beta_2\frac{h^2 T_0}{D_{22}}\frac{D_{12}+2D_{66}+D_{22}}{r^2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

при однородных краевых условиях

$$
\tilde{W}=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=0 \quad \text{при}\quad \varphi=0,\ \varphi=\alpha \tag{10}
$$

Ищем решение однородного дифференциального уравнения с однород ными краевыми условиями в виде

$$\tilde{W}(r,\varphi) = r^{\gamma} F(\varphi) \qquad (11)$$

После подстановки (11) в (9) для $F(\varphi)$ имеем

$$D_{22}\frac{d^4 F}{d\varphi^4} + 2\frac{d^2 F}{d\varphi^2}\left[(D_{12} + 2D_{66})(\gamma - 1)^2 + D_{22}\right] + \left[D_{11}(\gamma - 1)^2 -\right.$$

$$\left.- D_{22}\right]\gamma(\gamma - 2)F = 0 \qquad (12)$$

$$\begin{cases} F(\varphi) = 0 & \text{п ри } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha \\ \dfrac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0 & \text{п ри } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha \end{cases} \qquad (13)$$

Решение уравнения (12) представляется

$$F(\varphi) = A\mathrm{ch}s_1\varphi + B\mathrm{sh}s_1\varphi + C\mathrm{ch}s_2\varphi + D\mathrm{sh}s_2\varphi \qquad (14)$$

Здесь s_1, s_2 являются решениями характеристического уравнения, соответствующего уравнению (12) и имеют значения

$$s_{1,2} = \sqrt{-\left[k(\gamma - 1)^2 + 1\right] \pm \sqrt{(k(\gamma - 1)^2 + 1)^2 - \left[k_1(\gamma - 1)^2 - 1\right]\gamma(\gamma - 2)}} \qquad (15)$$

где $k_1 = \dfrac{D_{11}}{D_{22}}$, $k = \dfrac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}}$ (16)

Для определения постоянных из (13) будем иметь

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A\mathrm{ch}s_1\alpha + B\mathrm{sh}s_1\alpha + C\mathrm{ch}s_2\alpha + D\mathrm{sh}s_2\alpha = 0 \\ s_1^2(A\mathrm{ch}s_1\alpha + B\mathrm{sh}s_1\alpha) + s_2^2(C\mathrm{ch}s_2\alpha + D\mathrm{sh}s_2\alpha) = 0 \\ As_1^2 + Cs_2^2 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Условием, выражающим существования нетривиального решения системы (17), является уравнение

$$\mathrm{sh}s_1\alpha\,\mathrm{sh}s_2\alpha = 0 \qquad (18)$$

которое кроме тривиального решения имеет решение

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, s_1\alpha &= 0 \\ \mathrm{Im}\, s_1\alpha &= \pi n \end{aligned} \qquad (19)$$

Отделяя вещественную и мнимую части $s_1 = A(\cos\tilde{\theta} + i\sin\tilde{\theta})$, получим тригонометрическое представление для $\gamma = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, где ρ и

ψ определяются из следующей системы:

$$A^4\cos 4\theta + 2A^2(k\rho^2(\cos 2\theta\cos 2\psi - \sin 2\psi\sin 2\theta) + \cos 2\theta) +$$
$$+k_1\rho^4\cos 4\psi - \rho^2(k_1+1)\cos 2\psi + 1 = 0$$
$$A^4\sin 4\theta + 2A^2(k\rho^2(\cos 2\theta\cos 2\psi - \sin 2\psi\sin 2\theta) + \sin 2\theta +$$
$$+k_1\rho^4\sin 4\psi - \rho^2(k_1+1)\sin 2\psi = 0 \qquad (20)$$

откуда, для γ при условии $\alpha < \pi$ имеем

$$\gamma_{nj} = \rho_{nj}e^{i\psi_n} + 1 \qquad j = \overline{1,4}$$

где $$\rho_{n1,2} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2} - 1}{\sqrt{k_1}}}, \qquad \rho_{n3,4} = -\sqrt{\frac{\frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2} - 1}{\sqrt{k_1}}}, \qquad (21)$$

$$A_n = \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}} \qquad \cos 2\psi_n = \frac{2A_n k + k_1 + 1}{2\sqrt{k_1}(A_n^2 - 1)}$$

Причем выражение (21) справедливо, если $k \le \sqrt{k_1}$ и

$$\alpha \le \pi\frac{\sqrt{2(\sqrt{k_1} - k)}}{\sqrt{k_1} + 1}$$

Решение уравнения $\operatorname{sh} s_2\alpha = 0$ сводит к тому же самому. Употребляя формулу $\operatorname{sh} iz = i\sin z$ и краевые условия (13), для однородного решения $\bar{W}_0$, получим

$$\bar{W}_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\left[A_{1m}r^{\gamma_{1m}} + A_{2m}r^{\gamma_{2m}} + A_{3m}r^{\gamma_{3m}} + A_{4m}r^{\gamma_{4m}}\right]\sin\frac{\pi m}{\alpha}\varphi \qquad (22)$$

Частное решение получим методом вариации постоянных. Имея функцию $\bar{W}(r,\varphi)$, найдем и искомую $W(r,\varphi)$.

Теперь, исходя из (13), с самого начала представим функцию прогиба в виде

$$\bar{W}(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k(r)\sin\nu_k\varphi \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (9) и разлагая правую часть уравнения (9) в ряд по синусам, для определения $\Phi_k(r)$ получим

$$D_{11}\frac{d^4\Phi_k}{dr^4} + \frac{2D_{11}}{r}\frac{d^3\Phi_k}{dr^3} - \frac{\nu_k^2}{r^2}(2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22})\frac{d^2\Phi_k}{dr^2} +$$
$$+\frac{2\nu_k^2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}}{r^3}\frac{d\Phi_k}{dr} + \frac{D_{22}\nu_k^4 - 2(D_{12} + 2D_{66} + D_{22})\nu_k^2}{r^4} =$$
$$= R_k(r) \qquad (24)$$

Здесь

$$
R_k(r)=\frac{h^2}{6}\left(C_{3k}\left(\beta_1\frac{d^2I_{p_k}(cr)}{dr^2}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{dI_{p_k}(cr)}{dr}\nu_k d_{kk}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\beta_2}{r^2}\nu_k^2 I_{p_k}(cr)+\frac{2\beta_{12}}{r^2}\nu_k d_{kk}I_{p_k}(cr)-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{dI_{p_k}(cr)}{dr}\right)+ \tag{25}
$$

$$
+C_{4k}\left(\beta_1\frac{d^2K_{p_k}(cr)}{dr^2}-\frac{2\beta_{12}}{r}\frac{dK_{p_k}(cr)}{dr}\nu_k d_{kk}+\frac{\beta_2}{r^2}\nu_k^2K_{p_k}(cr)+\right.
$$

$$
+\frac{2\beta_{12}}{r^2}\nu_k d_{kk}K_{p_k}(cr)-\frac{2\beta_1-\beta_2}{r}\frac{dK_{p_k}(cr)}{dr}+\frac{b_k}{r^2}
$$

где $b_k=2h^2T_0\frac{(D_{12}+2D_{66}+D_{22})}{3D_{22}}\frac{1}{\pi k}((-1)^k-1)$. $\cos\nu_m\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}d_{km}\sin\nu_k\varphi$ (26)

Решение уравнения (25) имеется в виде

$$
\Phi_k=r^{\alpha k} \tag{27}
$$

Для $\overline{\alpha}_k$ получается алгебраическое уравнение четвертой степени. которое после подстановки $\overline{\alpha}_k=z_k+1$ (28)

$$
y^2-y(1+2\nu_k^2\overline{k}+\overline{k}_1)+\overline{k}_1(\nu_k^2-1)^2=0
$$

где $\overline{k}=\frac{D_{12}+2D_{66}}{D_{22}}$ $\quad\overline{k}_1=\frac{D_{22}}{D_{11}}$, $\quad y=z^2$ (29)

1. Если $D\geq 0$, имеем (30)

$$
y_{k1,2}=\frac{1+2\nu_k^2\overline{k}+\overline{k}_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(1+2\nu_k^2\overline{k}+k_1)^2}{4}-\overline{k}_1(\nu_k^2-1)^2} \tag{31}
$$

видно, что $y_{k1}>0$, $\quad y_{k2}>0$.

Уравнение (29) имеет корни

$$
\overline{\alpha}_{1,2}=1\pm\sqrt{y_{k1}}\qquad \overline{\alpha}_{3,4}=1\pm\sqrt{y_{k2}} \tag{32}
$$

Дискриминант уравнения (29) будет неотрицательный в следующих случаях: в первом случае угол раствора произвольный, а упругие характеристики материала пластинки такие, чтобы выполнялось условие $\overline{k}\geq\sqrt{\overline{k}_1}$. Если же $\overline{k}<\sqrt{\overline{k}_1}$, то угол раствора должен удовлетворять условию

$$
\alpha>\pi\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{\overline{k}_1}-k\right)}}{\sqrt{\overline{k}_1}+1} \tag{33}
$$

2. Пусть дискриминант уравнения (29) отрицателен. В этом случае уравнение (29) имеет комплексно-сопряженные решения

$$y_{k1,2} = 1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1 \pm i\sqrt{\bar{k}_1(\nu_k^2 - 1)^2 - \frac{(1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1)^2}{4}} \tag{34}$$

Условие отрицательности дискриминанта уравнение (29) приводит к неравенству

$$\bar{k} < \sqrt{\bar{k}_1}, \qquad \alpha < \pi\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{\bar{k}_1} - \bar{k}\right)}}{\sqrt{\bar{k}_1} + 1} \tag{35}$$

Представим (31) в тригонометрической форме

$$y_{k1} = \tilde{r}_k(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \qquad y_{k2} = \bar{y}_{k1}$$

Здесь $\tilde{r}_k = \sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)$, $\qquad \cos\psi_k = \dfrac{1 + 2\nu_k^2\bar{k} + \bar{k}_1}{2\sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)}$.

$$\sin\psi_k = \frac{\sqrt{\bar{k}_1(\nu_k^2 - 1)^2 - \frac{1}{4}(1 + 2\nu_k^2\bar{k} + k_1)^2}}{2\sqrt{\bar{k}_1}(\nu_k^2 - 1)} \tag{36}$$

Введем следующее обозначение:

$$\sqrt{\tilde{r}_k}\left(\cos\frac{\psi_k}{2} + i\sin\frac{\psi_k}{2}\right) = \bar{\alpha}_k + i\bar{\beta}_k \tag{37}$$

Решение однородного дифференциального уравнения (25) можно написать

$$\Phi_k^0 = r\Big(B_{1k}^0 r^{\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0 r^{\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r +$$
$$+ B_{3k}^0 r^{-\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{4k}^0 r^{-\bar{\alpha}_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r \tag{38}$$

Частное решение уравнения (25) построим методом вариации постоянных. Так как нас интересует поведение решений около вершины клина ($z = 0$), а для бесселевых функций имеем [3]

$$I_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{\Gamma(n+1)}(1 + o(x^2)),\ I_n'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-1}}{2\Gamma(n)}(1 + o(x^2)),\ I_n''(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n-2}}{4\Gamma(n-1)}(1 + o(x^2)) \tag{39}$$

при $x \to 0$ и n не целое, а имея в виду, что $k(x)$ стремится к бесконечности при $x \to 0$, а температура должна иметь конечную величину, возьмем $C_{4k} = 0$. Имея в виду и (39), для $W(r,\varphi)$ получим

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big\{r\Big(B_{1k}^0 r^{\bar{\alpha}_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0 r^{\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r + \tag{40}$$
$$B_{3k}^0 r^{-\alpha_k}\cos\bar{\beta}_k\ln r + B_{4k}^0 r^{-\alpha_k}\sin\bar{\beta}_k\ln r\Big) + dr^2\left(\bar{C}_k r^{\nu} + b_k + a_k\right)\Big\}\sin\nu_k\varphi + o(r^6)$$

если числа $\pm\alpha_k + 1$, $2 + p$ есть целые положительные числа.

Здесь

$$\overline{C}_k = C_{3k}\left(\left(\frac{c}{2}\right)^{p-2}\left(\frac{\beta_1}{4\Gamma(p-1)} - \frac{(2\beta_1 - \beta_2)}{2\Gamma(p)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta_2 v_k^2}{\Gamma(p+1)} + 2\beta_{12}\left(\frac{1}{2\Gamma(p)} + 1\right)d_{kk}\right)\right), \quad a = \frac{\beta_2 h^2 T_0}{3D_{22}v_k^3 d}((-1)^k - 1), \qquad (41)$$

$$d = \sin^2\frac{\psi}{2}\frac{1}{2\sqrt{r}\left(1 + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)}$$

В противном случае, если $1 \pm \alpha_k$, $2 + p$ не есть целые положительные числа, результаты исследования характера напряженного состояния в малой окрестности угловой точки приведут к условиям:

$$\alpha < \pi\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \qquad (42)$$

$$\sqrt{\sqrt{\overline{k}_1}(v_k^2 - 1)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + 2v_k^2\overline{k} + \overline{k}_1}{2\sqrt{\overline{k}_1}(v_k^2 - 1)}\right)} > 2 \qquad (43)$$

Условие (42) – результат наличия температурного поля. Если $\overline{k} < \sqrt{\overline{k}_1}$, согласно (35), (42), (43) угол раствора пластинки удовлетворяет следующему условию:

$$\alpha < \pi\min\left(\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{\overline{k}_1} - \overline{k}\right)}{16 + \left(1 + \sqrt{\overline{k}_1}\right)^2}}\right) \qquad (44)$$

В этом случае решение уравнения (6) будет

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\{r^{\overline{\alpha}_k + 1}(B_{1k}^0\cos\overline{\beta}_k\ln r + B_{2k}^0\sin\overline{\beta}_k\ln r) +$$

$$+ dr^2(\overline{c}_k r^p + b_k + a\}\sin v_k\varphi \qquad (45)$$

Пусть дискриминант уравнения (29) неотрицательный, тогда общее решение уравнения (25) будет

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\overline{B}_1^0 r^{1+\sqrt{\nu_{k1}}} + \overline{B}_2^0 r^{1-\sqrt{\nu_{k1}}} + \overline{B}_3^0 r^{1+\sqrt{\nu_{k2}}} + \overline{B}_4^0 r^{1-\sqrt{\nu_{k2}}} + \right. \qquad (46)$$

$$\left. + \frac{1}{D_{11}}\frac{\overline{c}_k r^{p+2}}{((p+1)^2 - \nu_{k2})((p+1)^2 - \nu_{k1})} + b_k r^2 + \overline{A}_k r^2\right\}\sin v_k\varphi + o(r^6)$$

Если $1 \pm \sqrt{y_{k1}}$, $1 \pm \sqrt{y_{k2}}$, $2 \pm p$ есть целые положительные числа, то в этом случае для любых значений раствора α не возникают особенности. В противном случае следует взять $C_{2k} = 0$, $\bar{B}_2^0 = \bar{B}_1^0 = 0$ и для $W(r,\varphi)$ имеем

$$W(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ \bar{B}_1^0 r^{1+\sqrt{y_{k1}}} + \bar{B}_2^0 r^{1+\sqrt{y_{k2}}} + \bar{c}_k r^{p+2} \times \tag{47}$$

$$\times \frac{1}{D_{11}((p+1)^2 - y_{k2})((p+1)^2 - y_{k1})} + b_k r^2 + A_k r^2 \Big\} \sin \nu_k \varphi + o(r^6)$$

Здесь $A_k = \dfrac{\beta_2 h^2 T_0}{3 D_{22} \nu_k^3}((-1)^k - 1)$

При этом, если $\bar{k} \geq \sqrt{k_1}$, то угол раствора пластинки должен удовлетворить следующему условию:

$$\alpha < \pi \min \left(\sqrt{\frac{K_{22}}{K_{11}}}, \ \frac{1}{1 + \dfrac{4\bar{k}}{\bar{k}_1} + \sqrt{\left(1 + \dfrac{4\bar{k}}{\bar{k}_1}\right)^2 + 3 - \dfrac{12}{\bar{k}_1}}} \right) \tag{48}$$

Если же $\bar{k} < \sqrt{\bar{k}_1}$, то условие (48) следует рассматривать вместе с условием (33).

Имея функцию прогиба при помощи известных формул [1], можно найти напряжения, моменты и перерезывающие силы. Видно, что в случае данного α можно добиться устранения особенностей выбором анизотропии, или для данного материала выбором раствора клина можно устранить всякую особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян В. С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. - Ереван: 1970. 443 с.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость. - Киев: 1975. 211 с.
3. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопровод ности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: 1960. 455 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 2.07.1996