ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Акопян А.С.

Ա. Ս. Հակոբյան

Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կայունության և ազատ տատանումների թվային լուծման մասին

Առաջարկվում է թվային լուծման մի մեթոդ դիֆֆերենցիալ օպերատորների սեփական արժեքների խնդիրների համար, որոնց բերվում են անիզոտրոպ սալերի տեսության դիտարկվող խնդիրները. Մեթոդը հիմնված է լուծման եռանկյունաչափական բազմանդամներով մոտարկման և կոլլոկացիաների մեթոդի վրա. Բերվում են հաշվումների ալգորիթմի նկարագրությունը, ինչպես նաև մեթոդի զուգամիտությունը ցուցադրող թվային օրինակները

A. S. Hakobian

On the numerical solution of stability and free vibration problems of anisotropic plates of variable thikness

Предлагается метод численного решения задачи на собственные значения дифференциальных операторов, к которым приводят рассматриваемые задачи теории анизотропных пластин. Метод основан на аппроксимации решения тригонометрическими полиномами, и методе коллокации. Приводится описание алгоритма вычислений, а также численные примеры, иллюстрирующие сходимость метода.

Теория анизотропных пластин [1, 2] показывает, что задачи устойчивости и свободных колебаний в большинстве случаев сводятся к задаче о собственных числах обыкновенных дифференциальных уравнений [5, 6]. В частном случае анизотропных пластин переменной толщины такие урав нения получены в работах [3, 4], где учитываются также поперечные сдвиги.

В настоящей работе предлагается метод численного решения полученных дифференциальных уравнений на собственные значения, базирующийся на представлении решения в виде тригонометрического полинома и методе коллокаций. В конечном счете задача сводится к задаче вычисления собственных значений линейной алгебраической системы, которая решается известными численными методами.

В качестве иллюстрации показана устойчивость работы метода на примере круговой пластины с линейно меняющейся толщиной.

1. Задачи устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин [2] математически формулируются как задачи собственных значений дифференциальных операторов в частных производных. В простых случаях, когда рассматривается устойчивость или свободные колебания полосы или круговой пластины, задача может быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению [2, 3, 4, 8, 9, 10]. При дальнейшем упрощении постановки задачи, удается аналитически получить характеристические трансцендентные уравнения [4], корни которых являются критическими усилиями или собственными частотами колебаний рассматриваемой пластины.

В общем случае задача обычно сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, являющимися функциями критической нагрузки или собственной частоты, то есть речь идет об определении собственных чисел λ дифференциального уравнения N-го порядка

$$\sum_{i=1}^{N+1}\left[f_i(x)-\lambda g_i(x)\right]y^{(i-1)}(x)=0,\quad x\in\left[LB,UB\right]. \tag{1}$$

Здесь LB и UB соответственно нижний и верхний пределы интегрирования, обычно связанные с конечными размерностями пластин. y обычно прогиб пластины или некоторый дифференциальный оператор от прогибов. f_i и g_i достаточно гладкие функции, содержащие физические и геометрические параметры пластины. В уравнении (1) предполагается, что коэффициенты линейно зависят от параметра λ.

Те или иные условия закрепления пластин, в общем случае также могут быть выражены в форме, аналогичной уравнению (1), но примененные в определенных точках интервала интегрирования. Такие "точечные" условия будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^{N+1}\left[\varphi_{ki}-\lambda\psi_{ki}\right]y^{(i-1)}(x_{0k})=0,\quad k=1,\dots,N. \tag{2}$$

Здесь число точечных условий N должно быть равно порядку дифференциального уравнения (1), согласно общей теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [5, 6]. x_{0k} точки, где заданы условия (2), обычно концы интервала интегрирования, φ_{ki}, ψ_{ki} - постоянные коэффициенты, зависящие лишь от физических и геометрических свойств пластины.

Метод коллокаций предполагает точное выполнение уравнения (1) лишь в конечном числе точек, так называемых точек коллокации. Таким образом, получается дискретная аппроксимация рассматриваемого уравнения на отрезке, которая тем точнее, чем больше число точек коллокации. В общей теории линейных операторов доказана сходимость метода коллокаций при довольно общих предположениях о свойствах оператора. Скорость же сходимости в конкретных случаях может быть исследована с помощью численных экспериментов, что и будет сделано ниже на примерах кольцевых пластин.

Пусть точки коллокации x_k распределены равномерно на интервале интегрирования $[LB, UB]$, включая концы

$$x_k = (k-1)\frac{UB-LB}{NP+1} + LB, \quad k = 1,\ldots, NP, \tag{3}$$

где NP – число точек коллокации. Теперь уравнение (1) сводится к системе линейных уравнений относительно значений функции y и ее производных до N-го порядка включительно в точках коллокации

$$\sum_{j=1}^{N+1}\left[f_j(x_k) + \lambda g_j(x_k)\right] y^{(j-1)}(x_k) = 0, \quad k = 1,\ldots, NP. \tag{4}$$

Объединяя уравнения (4) с точечными условиями (2), получим систему

$$\sum_{j=1}^{N+1}\left[f_j(t_k) + \lambda g_j(t_k)\right] y^{(j-1)}(t_k) = 0, \quad k = 1,\ldots, NP+N, \tag{5}$$

где точки t_k соответствуют точкам коллокации x_k при $k = 1,\ldots, NP$, а остальные N точек t_{k+NP} при $k = 1,\ldots, N$ соответствуют точкам x_m, где заданы условия (2). Аналогично, коэффициенты $f_j(t_k)$ и $g_j(t_k)$ есть значения функции f_j и g_j в точках коллокации x_k при $k = 1,\ldots, NP$, а при значениях $k = NP+1,\ldots, NP+N$ они равны коэффициентам $\varphi_{k-NP,j}$ и $\psi_{k-NP,j}$ точечных условий (2) соответственно.

Имея тот или иной агрегат интерполяции неизвестной функции y в уравнении (1) и условиях (2), можно значительно уменьшить число неизвестных в полученных дискретных уравнениях (5). Подходящим для задач устойчивости и свободных колебаний пластин переменной толщины, также как и для многих других задач того же класса, являются тригонометрические полиномы, в силу гладкости функции y

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{NF}(a_q \cos q\omega x + b_q \sin q\omega x), \quad x \in [LB, UB]. \tag{6}$$

Здесь a_0, a_q, b_q – неизвестные коэффициенты, NF – степень тригоно метрического полинома (6), ω — базовая частота, обычно $\pi/(UB-LB)$. Можно заметить, что область изменения аргумента x не совпадает ни с полупериодом, ни с полным периодом тригонометрических функций полинома (6), если не имеет место $LB=0$. Теория тригонометрической полиномиальной интерполяции утверждает, что даже и в этом случае при возрастании степени полинома NF точность аппроксимации увеличивается. Такое ассиметрическое представление полинома (6) выбрано специально с тем, чтобы соответствовать реальной физической задаче. Например, в рассматриваемых в следующих пунктах задачах для кольцевой пластины, интервал интегрирования, скажем $[a,b]$, сдвинут от нуля, однако реальные формы потери устойчивости, или формы свободных колебаний определяются на интервале $[-b,b]$.

Поэтому в разложении (6) область изменения аргумента сдвинута и совпадает с областью интегрирования уравнения (1), хотя в большинстве случаев, при $LB \neq 0$, форма потери устойчивости, или свободных колебаний определена на $[-UB,UB]$ или $[0,UB]$. В тех же случаях, когда период тригонометрических функций в разложении (6) должен совпадать с областью интегрирования уравнения (1), следует заменой переменных установить $LB=0$.

Представление решения y в виде тригонометрического полинома (6) позволяет окончательно свести задачу определения собственных чисел λ дифференциального уравнения (1) при точечных условиях (2) к задаче на собственные значения системы линейных алгебраических уравнений

$$(A-\lambda B)X=0 \tag{7}$$

относительно вектора неизвестных X, компоненты которого определяются как

$$\begin{aligned} X_{2q+1} &= a_q, \quad q=0,1,\dots,NF \\ X_{2q} &= b_q, \quad q=1,2,\dots,NF. \end{aligned} \tag{8}$$

Матрицы A и B имеют $NP+N$ строк и $2\cdot NF+1$ столбцов и заполнены, которые определяются следующими соотношениями при

$k=1,\dots,NP+N,\quad q=1,\dots,NF$

$$A_{k1}=f_1(t_k)/2,\qquad B_{k1}=g_1(t_k)/2$$

$$A_{k,2q+1}=\sum_{j=1}^{N+1} f_j(t_k)\,\mathrm{Re}\big[z_{qj}(t_k)\big],\qquad B_{k,2q+1}=\sum_{j=1}^{N+1} g(t_k)\,\mathrm{Re}\big[z_{qj}(t_k)\big].$$

$$A_{k,2q} = \sum_{j=1}^{N+1} f_j(t_k)\,\mathrm{Im}\left[z_{qj}(t_k)\right], \qquad B_{k,2q} = \sum_{j=1}^{N+1} g(t_k)\,\mathrm{Im}\left[z_{qj}(t_k)\right], \tag{9}$$

где $\mathrm{Re}[\cdot]$ и $\mathrm{Im}[\cdot]$ означают соответственно операции взятия действительной и мнимой частей комплексного числа, $z_{qj}(t_k)$ определяется как j - ая производная q -ой комплексной гармоники $e^{iq\omega t}$ с базовой частотой ω, взятая в точке t_k, то есть

$$z_{qj}(t_k) = (iq\omega)^{j-1} e^{iq\omega t_k}. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что степень полинома NF (6) должна быть выбрана так, чтобы матрицы в уравнении (6) получились квадратными

$$NF = (NP + N - 1)/2. \tag{11}$$

Только при этом значении NF, согласно общей теории задач на собственные значения дифференциальных операторов [6], собственные значения системы линейных алгебраических уравнений [7] при неограниченном увеличении числа точек коллокации NP стремятся к собственным числам λ уравнения (1) и условий (2). Вот почему в уравнении (7) сохранено обозначение λ для параметра, который лишь в пределе совпадает с соответствующим параметром в (1) и (2). Решая систему (7) на собственные значения λ, находим лишь аппроксимацию к искомым собственным значениям задачи (1) (2), то есть, в конечном счете, аппроксимацию к критическим усилиям или собственным частотам анизотропных пластин переменной толщины.

2. Алгоритм численного решения рассматриваемого класса задач устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин переменной толщины, реализующий изложенный выше метод, состоит в построении матриц A и B эквивалентной линейной алгебраической системы (7) по формулам (9) и (10), и вычислении собственных чисел λ системы (7) одним из известных численных методов.

Для решения задачи (7) на собственные значения целесообразно применить QR алгоритм или любую его модификацию, так как этот алгоритм хорошо работает на системах средних размеров. QR алгоритм генерирует последовательность матриц, ортогонально подобных исходной, и при итерациях матрицы сходятся к правой треугольной или квазитреугольной матрице, причем скорость сходимости поддиагональных элементов к нулю управляется отношением модулей различных собственных значений. Скорость сходимости повышается использованием так называемых сдвигов. Для эрмитовых матриц скорость сходимости удается сделать кубической с соответственно быстрой стабилизацией диагонального элемента.

Следует отметить, что система (7), являясь приближенным представлением системы (1)-(2), может содержать собственные числа, весьма далекие от собственных чисел исходной системы, так называемые "шумовые" решения. Например, в большинстве случаев физическая постановка задачи, а также свойства дифференциальных операторов в (1) и (2) приводят к вещественным собственным числам λ, однако система (7) может содержать комплексно сопряженные пары собственных чисел. Это обычно имеет место для больших по модулю собственных чисел. Первые же несколько собственных числа обычно являются хорошими аппроксимациями к искомым. И, поскольку размерность системы (7) может быть задана произвольно, в зависимости от параметра NP количества точек коллокации, то и число надежных чисел, не содержащих мнимых частей, например, в случае, когда все собственные числа ожидаются вещественными, может быть задано априори. Практически, число точек коллокации NP необходимо бывает задавать достаточно большим, тогда как число интересующих собственных значений ограничивается первыми двумя-тремя, поэтому всегда можно быть уверенным в том, что система (7) хорошо аппроксимирует исходную систему в интересующей области собственных значений.

3. Предложенный метод и реализующие его программные компоненты использованы автором для решения ряда конкретных задач устойчивости и свободных колебаний ортотропных пластин [8, 9, 10]. Ниже приводятся численные результаты решения этих задач при типичных значениях параметров, призванные проиллюстрировать сходимость метода.

Рассмотрим вначале осесимметрическую задачу устойчивости ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной. В работе [9] предварительно решается плоская задача для ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной при действии радиально растягивающих сил, приложенных на внешнем контуре. Затем, используя найденные закономерности распределения эталонных усилий, решается осесимметрическая задача устойчивости пластинки в рамках уточненной теории [3], учитывающей влияние деформации поперечных сдвигов.

Решение плоской задачи сводится к интегрированию обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, при заданных единичных радиальных усилиях на внешнем контуре и свободном от нагрузки внутреннем контуре.

Применяется метод коллокации с разложением решения в ряд по полиномам Чебышева, реализованный в модуле $D02JAF$ пакета NAG [7].

Полученное решение плоской задачи используется затем в осесимметрической задаче устойчивости, которая сводится к задаче на собственные значения линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в форме (1), где роль параметра λ здесь играет критическая безразмерная нагрузка

$$\overline{p} = \frac{p}{\sigma_0 h_0}, \tag{12}$$

где p - интенсивность равномерной растягивающей радиальной нагрузки на внешнем контуре пластинки, σ_0 - характерное напряжение материала, h_0 - толщина пластинки на внутреннем контуре.

Описанный в предыдущих пунктах метод был применен к решению полученной задачи на собственные значения. В работе [9] приводятся графики зависимости безразмерных критических усилий (12) от физико-механических и геометрических параметров пластинки при двух различных типах закрепления пластинки по внешнему контуру: шарнирное опирание и заделка. Там же приводятся данные, иллюстрирующие динамику сходимости численного решения при возрастании степени дискретизации, определяемой числом NP точек коллокации (3).

Ниже, в табл. 1, приводятся первые три значения критической безразмерной нагрузки (12) при типичных значениях параметров пластинки, и при возрастающих значениях числа точек коллокации NP.

Таблица 1

NP	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{p}_3$
8	3.289276	18.82781	25.20926
10	4.434246	19.28009	25.32463
12	4.754383	19.42811	25.36006
14	4.855109	19.47864	25.37174
16	4.888516	19.49626	25.37561
18	4.899867	19.50246	25.37692
20	4.903768	19.50465	25.37736
22	4.905113	19.50542	25.37751
24	4.905578	19.50569	25.37757
26	4.905739	19.50578	25.37758
28	4.905793	19.50581	25.37759
30	4.905813	19.50583	25.37759

Критические нагрузки кольцевой пластинки, вычисленные при различной дискретизации

Приведенные данные показывают быструю сходимость метода. Уже при 24 точках коллокации вычисленные значения имеют четыре-пять значащих цифр. Дальнейшее увеличение числа точек коллокации приводит лишь к слабой осцилляции вокруг точного значения, из-за неизбежного накопления ошибок в процессе вычислений. Заметим, что для инженерных расчетов, при общепринятой точности в две-три значащие цифры, достаточно будет выбрать $NP = 16$.

4. Рассмотрим теперь задачу свободных осесимметрических колебаний ортотропной кольцевой пластинки с линейно меняющейся толщиной. В работе [10] получены уравнения этой задачи при пренебрежении инерцией вращения и тангенциальными перемещениями срединной плоскости, и с учетом поперечных сдвигов. Уравнения являются дифференциальными пятого порядка относительно функции

$$y = s\frac{df}{d\rho} - \chi\varphi \tag{13}$$

при обозначениях

$$s = \frac{h_0}{b}, \quad \chi = a_r B_r,$$

где h_0 - толщина пластинки на внутреннем контуре, b - внешний радиус, f - форма свободных колебаний пластинки при прогибах $\omega = h_0 f \cos\omega_n t$, a_r, B_r - параметры материала, φ - амплитуда гармонических колебаний функции $\varphi_1 = B_r \varphi \cos\omega_n t$, описывающей распределение по толщине поперечного сдвига.

Вместе с граничными условиями на внешнем и внутреннем контурах пластины, определяемыми отсутствием усилий на внутреннем контуре и шарнирном или защемленном закреплении на внешнем контуре, задача свободных осесимметричных колебаний сводится к задаче на собственные значения полученного дифференциального уравнения относительно функции (13) в форме (1)-(2) при параметре λ в форме

$$\Omega_n^2 = \frac{h_0^2\omega_n^2 d}{B_r} \tag{14}$$

где ω_n - круговая частота собственных колебаний пластинки, d - плотность ее материала.

Численный метод, описанный выше, был применен в работе [10] к полученной задаче собственных значений, и ряд численных значений был приведен при различных физических и геометрических параметрах пластинки для различных условий закрепления. В табл. 2 для типичных значений параметров пластинки при свободном внутреннем и шарнирно опертом внешнем контуре, приводятся значения первых трех собственных чисел Ω_n, вычисленных с различной дискретизацией NP.

Приведенные данные показывают, как и в случае задачи устойчивости, хорошую сходимость метода. Уже при числе точек коллокации $NP = 23$ вычисленные собственные числа имеют две-три значащие цифры, что вполне достаточно для инженерных приложений.

5 Рассмотренные численные примеры подтверждают правильность выбранной тригонометрической полиномиальной аппроксимации решений

Таблица 2

NP	Ω_1	Ω_2	Ω_3
11	0.0610135	0.0821126	0.1696936
13	0.0550261	0.0941775	0.1684714
15	0.0533273	0.0977904	0.1678758
17	0.0167100	0.0525690	0.0992897
19	0.0180677	0.0521817	0.0999957
21	0.0186871	0.0519710	0.1003521
23	0.0190046	0.0518525	0.1005397
25	0.0191759	0.0517845	0.1006413
27	0.0192716	0.0517452	0.1006973
29	0.0193252	0.0517220	0.1007286
31	0.0193558	0.0517083	0.1007461
33	0.0193733	0.0517004	0.1007561
35	0.0193833	0.0516957	0.1007618
37	0.0193891	0.0516930	0.1007650

Собственные числа кольцевой пластинки, вычисленные при различной дискретизации

задач устойчивости и свободных колебаний анизотропных пластин переменной толщины. Предложенный метод показал хорошую сходимость на широком спектре задач [8, 9, 10], где дифференциальные операторы зачастую при экстремальных значениях параметров имели быстро меняющиеся коэффициенты, оказывающие эффект, близкий к устранимым разрывам.

Таким образом, есть все предпосылки дальнейшего расширения класса решаемых задач теории анизотропных пластин, приводимых к уравнениям вида (1) при точечных условиях (2). Многие задачи устойчивости и свободных колебаний из теории анизотропных оболочек также могут быть при ряде упрощающих предположений приведены к уравнениям и условиям требуемого вида и решены численно предложенным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Физматгиз, 1957. 463 с.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
3. Киракосян Р. М. Об одной уточненной теории анизотропных пластин переменной толщины. Изв. АН Армении. Механика. 1991, т. 44 N 3, с. 26-33.
4. Акопян А. С., Киракосян Р. М. О нижних оценках критических сил сжатых полос линейно переменной толщины. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т. 48, N 3, с. 69-71.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М.: Мир, 1970. 521 с.
6. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. С техническими приложениями, пер. с нем., М.: Мир, 1968, 504 с.
7. NAG Fortran Library Manual. Mark 8, 1980, NAG Central Office, Bandury Road, Oxford OX26NN, UK.
8. Акопян А. С., Киракосян Р. М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов. – Изв. НАН Армении, Механика, 1995 г., т. 48, N 4, с. 3-8.
9. Акопян А. С., Киракосян Р. М. Осесимметричная задача устойчивости ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом поперечного сдвига. – Изв. НАН Армении, Механика, 1996 г., т. 49 N 2, с. 52-61.

Институт механики НАН РА

Поступила в редакцию 17.07.1995