ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

# ДОЖДЕВАЯ ЭРОЗИЯ ПОЧВЫ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ

Сагомонян А. Я.

**Ա. Յա. Սաղոմոնյան**
**Հողի անձրևային էրոզիան բարձունքների լանջերին**

Ուսումնասիրվում է հողի շարժումը բարձունքների լանջերին: Հողի վերին շերտի համար առաջարկվում է օգտագործել համասեռ, անսեղմելի հեղուկի մոդելը: Հողի շարժման արագության բաղադրիչները որոշվում են կվադրատուրաներով:

**A. Ja. Sagomonian**
**Rain erosian of soil of hillsides**

Исследуется движение почвы на склонах возвышенностей. Для верхнего слоя почвы предлагается использовать модель однородной несжимаемой жидкости. Компоненты скоростей движения почвы определяются в квадратурах.

1. Как и в работе [1], предполагается, что жидкость капель дождя, достигнув поверхности склона, проникает (фильтрируется) в поры почвы. В результате, непосредственно под поверхностью склона образуется слой водонасыщенной почвы – суспензии, которая под действием силы тяжести и возникающих при движении диссипативных сил, стекает к подножию возвышенности. При этом часть жидкости, не проникающая в почву, образует на поверхности склона сплошной слой воды, также стекающий к подножию. Здесь весь этот процесс считается установившимся, а движение – плоскопараллельным. В пространстве дождя над склоном объемная концентрация $\omega$ жидкости капель постоянна и равномерно распределена. Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является поверхностью разрыва параметров среды. Склон представляет собой пористую поверхность с концентрацией пор $m$, равной объемной концентрации (пористости) $m$. Величина $m$ постоянна и равномерно распределена в почве. Поверхность склона является границей между слоями жидкости и суспензии. Вне слоя суспензии почва находится в покое. Различные виды почв после водонасы-

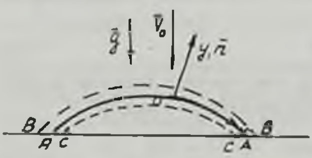
щения образуют стекающую в слое суспензию с различными физико-механическими свойствами. В зависимости от этих свойств исследование движения суспензии в слое можно проводить на основе модельных сред: вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, вязко-пластической несжимаемой среды и двухфазной среды - смеси жидкости с малыми твердыми частицами [2,3]. В настоящей работе суспензия моделируется однородной, несжимаемой ньютоновской жидкостью. Плотность суспензии определяется по формуле

$$\rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \qquad (1)$$

где $\rho$ - плотность воды, $\rho_1$ плотность вещества почвы. Динамическая вязкость суспензии $\mu$ (эффективный коэффициент вязкости) предполагается постоянной и заданной. Коэффициент $\mu$ больше коэффициента вязкости жидкости капель дождя $\eta$. При малой объемной концентрации $c$ твердых сферических частиц в суспензии, А. Эйнштейном получена формула [3]

$$\mu = \eta\left(1 + \frac{5}{2}c\right), \quad c << 1 \qquad (2)$$

При больших концентрациях, вязкость $\mu$ зависит от градиента скорости. Сведения о коэффициенте вязкости $\mu$ при больших концентрациях $c$ содержатся в книге [4]. Схематично, картина движения в слоях, образованных в окрестности поверхности склона возвышенности, показана на фиг. 1. Горизонтальной линией на этой фигуре обозначена поверхность Земли. Векторы ускорения силы тяжести $\bar{g}$ и скорости капель дождя $\overline{V}_0$ параллельны и одинаково направлены к горизонтальной линии. Стрелками показаны направления движения в слоях. В плоскости движения ось $x$ направлена вдоль поверхности склона вправо к подножию. Ось $y$ - по внешней нормали к поверхности склона.



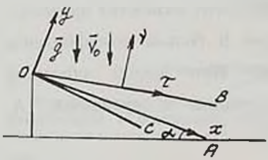

Фиг.1

Скорость фильтрации жидкости капель в почву $\overline{w}$ подчинено закону Дарси при ломинарном движении жидкости в порах [5]. Скорость $\overline{w}$ определяется как секундный расход жидкости на единицу площади поперечного сечения почвы. Эта скорость связана с действительной скоростью $\overline{w}_0$ жидкости в порах почвы равенством

$$w = mw_0 \qquad (3)$$

Величины $w_0$ и $w$ имеют порядок нескольких миллиметров в секунду, скорость $v_0$ капель дождя имеет порядок 7 9 метров в секунду. Предполагается, что отношения характерных толщин слоев к среднему радиусу кривизны поверхности склона малы. Так же малы отношения порядков величин скоростей вдоль осей $x$ и $y$. При этих ограничениях будут выполнены условия, при которых можно пользоваться приближенными уравнениями Рейнольдса для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в слоях [6]

Ниже, при исследовании, поверхность склона считается плоскостью, наклонную к горизонтальной поверхности Земли под углом $\alpha$ (фиг. 2)




Фиг.2

В плоскости движения на фиг 2 линия ОА изображает плоскость склона, OB есть граница между областью дождя и слоем жидкости, линия ОС разделяет слой суспензии от остальной неподвижной части почвы возвышенности. Изменением поверхности склона в процессе эрозии пренебрегается. Начало неподвижной системы координат берется в вершине возвышенности, ось $x$ направляется вдоль плоскости выбранного склона возвышенности, вниз к подножию, ось $y$ перпендикулярно к оси $x$ (фиг. 2). Предполагается, что подлежащие определению кривые $OB$ и $OC$ сходятся в одной и той же точке - в начале координат (вершине возвышенности). Представим эти линии соответственно уравнениями, определяющими толщину слоев

$$y = H(x), \quad y > 0; \quad y = h(x), \quad y < 0 \tag{4}$$

Приближенные уравнения Рейнольдса, описывающие движение жидкости в слое над поверхностью склона, представляются в виде [6]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

где $v$, $w$ - компоненты скорости жидкости вдоль $x$ и $y$. На граничной поверхности разрыва между слоем и областью дождя уравнения сохранения массы и количества движения несжимаемой жидкости представляются равенствами

$$v_\tau = V_{0\tau}, \quad v_\nu = \omega V_{0\nu}, \quad \rho\omega V_{0\nu}(V_{0\nu} - v_\nu) = P_1 - P_0 \tag{6}$$

Здесь $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ единичные векторы вдоль касательной и нормали к граничной линии, символы с индексами $\tau$, $\nu$ суть проекции вектора на эти направления: $P_0$, $P_1$ давления за и перед поверхностью разрыва. Из

Уравнение неразрывности в системе (5) позволяет определить компоненты скоростей $w$ и $w_1$ в квадратурах по заданным значениям $v$ и $u$ в формулах (12) и (18). Постоянные в квадратурах определяются из условий $y = H$, $w = w^*$, $y = 0$, $w_1 = w_0'$, где $w^*$ и $w_0'$ даны формулами (8) и (26).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. К вопросу дождевой эрозии почв. - Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N 1 с. 20-31.
2. Реология суспензии (сб. статей). - М.: Мир, 1975.
3. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М.: Мир, 1973.
4. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. - М.: Мир, 1971.
5. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.: Гостехиздат, 1947.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955.
7. Слезкин Н. А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы и пористого дна. - Ж-л. ВМУ, матем., механ., 1957, N 5, с. 3-5.
8. Бабаджанян Г. А., Данелян Л. Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. - Изв. АН Арм.ССР, сер. физ-мат. наук, 1963, т. 16, N 3, с. 83-90.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
12.07.1994

уравнения количества движения в формуле (6) следует, что давление за разрывом $P_r$ мало отличается от давления. Например, при $\omega = 10^{-2}$, $V_0 = 10$ м/с для воды давление $P_r$ отличается от $P_a$ меньше одного процента. Из первых двух равенств (6) с помощью первого уравнения (4), в согласии с фиг.2, нетрудно получить соотношения

$$\frac{v_r}{V_0} = \frac{H' + \mathrm{tg}\alpha}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)^{1/2}}, \quad -\frac{v_r}{\omega V_0} = \frac{1 + \mathrm{tg}\alpha H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)^{1/2}}$$

$$H' = \frac{dH}{dx} \tag{7}$$

Пусть $v^*$, $w^*$ обозначают значения компонент скорости $v$, $w$ в слое, непосредственно за граничной поверхностью разрыва. Эти значения определяются следующими выражениями

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\mathrm{tg}\alpha(1+\omega H'^2) - (1-\omega)H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)}, \quad \frac{w^*}{V_0} = \frac{(1-\omega)\mathrm{tg}\alpha H' - (\omega + H'^2)}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)} \tag{8}$$

$$y = H(x)$$

Теперь проинтегрируем второе уравнение в формуле (5) и полученное подставим в левую часть первого уравнения этой формулы. В результате придем к уравнениям

$$P - P_a = -\rho g\cos\alpha(y - H(x))$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{g}{\nu}(\cos\alpha H'(x) - \sin\alpha), \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{9}$$

Последнее уравнение дважды проинтегрируем по:

$$v = \frac{g}{2\nu}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)y^2 + C_1 y + C_2 \tag{10}$$

Предполагается, что непосредственно за граничной поверхностью разрыва напряжение сдвига равно нулю. В рамках принятых приближений Рейнольдса это приводит к условию

$$y = H(x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Значение скорости $v$ за этой граничной поверхностью определено первым равенством формулы (3). Оба эти условия достаточны для нахождения величин $C_1$ и $C_2$ в формуле (10). В результате получим

$$v = \frac{g}{2\nu}(\cos\alpha H(x) - \sin\alpha)(y - H)^2 + v^*$$

$$\frac{v^*}{V_0} = \frac{\mathrm{tga}(1+\omega H'^2) - (1-\omega)H'}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}(1+H'^2)} \tag{12}$$

Выше было показано, что $P_{s} \approx P_{a}$. На поверхности склона ($y = 0$) скорость $v = V$, где

$$V = \frac{gH^2}{\nu}(\cos\alpha H'(x) - \sin\alpha) + v^* \tag{13}$$

2. Слой суспензии под поверхностью склона моделируется несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью $\rho_0$ и постоянным коэффициентом динамической вязкости $\mu$. Концентрация жидкости капель дождя в порах суспензии в процессе движения остается постоянной. Компоненты скорости суспензии вдоль осей $x$, $y$ обозначим через $u$ и $w_1$. Движение в слое подчиним приближенным уравнениям Рейнольдса, приведенным в формуле (5). Выкладки аналогичные, сделанным выше, приводят к следующей формуле для давления в суспензии

$$P - P_a = P_0 g \cos\alpha(\varepsilon H(x) - y), \quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad y \le 0 \tag{14}$$

Для скорости частиц суспензии вдоль оси $x$, эти выкладки приводят к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{g}{\nu_0}(\varepsilon\cos\alpha H(x) - \sin\alpha), \quad \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \tag{15}$$

Отсюда интегрированием по $y$ получим

$$u = \frac{g}{2\nu_0}(\varepsilon\cos\alpha H(x) - \sin\alpha) + C_1 y + C_2 \tag{16}$$

Обозначим значение скорости $u$ на поверхности склона ($y = 0$) через $U$. На поверхности склона должны выполняться условия

$$y = 0, \quad V = U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{17}$$

Граничные условия (17) и (13) определяют величины $C_1$, $C_2$ в формуле (16). В результате получим

$$u = \frac{g}{2\nu_0}(\varepsilon\cos\alpha H' - \sin\alpha)y^2 - \frac{\eta}{\mu}\frac{g}{\nu}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)Hy + U,$$

$$U = V \tag{18}$$

На другой границе слоя суспензии отсутствует движение частиц вдоль оси $x$:

$$y = -h(x), \quad u = 0 \tag{19}$$

Используя это условие из (18), получим уравнение, определяющее толщину слоя суспензии

$$\frac{g}{2\nu_0}(\varepsilon\cos\alpha H' - \sin\alpha)h^2 + \frac{\eta g}{\mu\nu}(\cos\alpha H' - \sin\alpha)Hh + V = 0 \tag{20}$$

или в другой записи

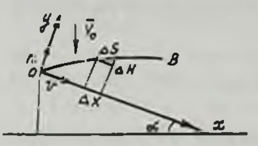
$$(\varepsilon H' - \mathrm{tg}\alpha)h^2 + 2\frac{\eta}{\mu}\frac{\nu_0}{\nu}(H' - \mathrm{tg}\alpha)Hh + 2V\frac{\nu_0}{g}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \tag{21}$$

где скорость $V$ берется по формуле (13). Секундный расход суспензии в слое, стекающей к подножию возвышенности, определяется интегралом

$$Q = \rho_0\int_{-h}^{0} u\,dy = \frac{\rho_0 g}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\left[(\varepsilon H' - \mathrm{tg}\alpha)\frac{h^3}{6\nu_0} - \frac{\eta}{\mu}(H' - \mathrm{tg}\alpha)\frac{Hh^2}{2\nu}\right] + \tag{22}$$

$$+\rho_0 Vh$$

Для производства расчетов по полученным выше формулам необходимо определить толщину слоя жидкости $H(x)$ над поверхностью склона. Воспользуемся интегральным выражением закона сохранения массы установившегося движения в этом слое. Выделим элемент объема $ABCD$ между границами слоя, как показано на фиг.3. Условие о том, что изменение массы несжимаемой жидкости в этом объеме за время $\Delta t$ равно нулю, записывается так




Фиг.3

$$\int_0^H \mathrm{v}dy - \int_0^{H+\Delta H}\mathrm{v}dy + \omega V_0(\alpha - \beta)\Delta s - mw_0'\Delta x = \frac{\partial}{\partial t}\left[H\Delta x + \frac{\Delta H\Delta x}{2}\right]\Delta t = 0$$

или, после сокращений

$$-\int_H^{H+\Delta H}\mathrm{v}dy + \omega V_0\cos(\alpha - \beta)\Delta s - mw_0'\Delta x = 0$$

После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta H \to 0$, так как

$$dx = ds\cos\beta,\quad dH = H'(x)dx,\quad \mathrm{tg}\beta = H'(x) = \frac{dH}{dx}.$$

из последнего выражения получим

$$-\mathrm{v}^* H' + \omega V_0\frac{1 + \mathrm{tg}\alpha H'}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} - mw_0' = 0 \tag{23}$$

Скорость $\mathrm{v}^*$ определена по формуле (8). Символом $w_0'$ обозначена средняя действительная скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона ($y = 0$). Заменив значение $\mathrm{v}^*$ по формуле (8), из (23) получим

$$\left(1-\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)H'^2-(1-\omega)\operatorname{tg}\alpha H'-$$
$$-\left(\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\omega\right)=0 \tag{24}$$

Дифференциальное уравнение (24) решается при заданном значении скорости $w_0'$ и граничном условии

$$x=0,\quad H=0 \tag{25}$$

В ряде работ, например [7,8] принято, что скорость $w_0'$ пропорциональна давлению на поверхности склона. В рассматриваемой работе такая зависимость записывается в виде

$$w_0'=\gamma\rho g\cos\alpha H(x)=\gamma\rho g\frac{H(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{26}$$

где $\gamma$ – коэффициент пропорциональности. Используя это равенство из (24), получим

$$\left(1-\frac{m\gamma\rho g}{V_0}H\right)H'^2-(1-\omega)\operatorname{tg}\alpha H'-\left(\frac{m\gamma\rho g}{V_0}H-\omega\right)=0 \tag{27}$$

Заметим, что при постоянном значении скорости $w_0'$ действительные решения уравнения (24), удовлетворяющие условия (25) будут прямыми линиями, исходящими из начала координат. Если допустить, что граничная линия $y=H(x)$ мало отличается от прямой так, что в уравнении (24) $H'^2$ малая величина и в этом уравнении можно пренебречь первым членом, то придем к выражению

$$(1-\omega)\operatorname{tg}\alpha H'+\frac{m}{V_0}w_0'\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\omega=0$$

Подставив в этом уравнении значение $w_0'$ по формуле (26) и интегрируя его при условии (25), придем к решению

$$B-H(x)=B\bar{e}^{\beta x},\quad B=\frac{\omega V_0}{m\gamma\rho g},\quad \beta=\frac{m\gamma\rho g}{(1-\omega)tg\alpha V_0} \tag{28}$$

Из решения (28) следует, что толщина слоя жидкости асимптотически при $x\to\infty$ приближается к величине $B$: $0\le H\le B$. Решения квадратного относительно производной $H'(x)$, уравнения (27) определяются квадратурой. Действительные решения удовлетворяют условию (25). При этом производная $H'(x)$ должна быть положительной: $H'>0$