ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 50, N 1, 1997 Механика

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ТРУБАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е.

Գ.Հ.Բաբաջանյան, Լ.Ե.Դանիելյան

Իրական գազի ոչ ստացիոնար շարժումը ծակոտկեն պատերով խողովակներում

Դիտարկվում է հարթ և գլանային ծակոտկեն (թափանցիկ) պատերով իրական (մածուցիկ) գազի ոչ ստացիոնար շարժումը. երբ խախտվում է շարժման ստացիոնար ռեժիմը գազամուղի վերջնամասում հոսքի դադարեցման պատճառով

Դրված խնդիրը բերվում է երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանների տրումով. Կատարելով հատուկ ձևով գծայնացում (ըստ Լ. Ս. Լեյբենզոնի) և օգտվելով ինտեգրալ ձևափոխության հնարավորությունից, ստացվում են փակ ֆունկցիոնալ լուծումներ և որոշվում են գազի շարժման արագության, ճնշման, խտության երկայնական և ընդլայնական ելքի փոփոխման օրինաչափությունները, որպես ժամանակի և կետի կոորդինատների ֆունկցիա.

Հաշված է թվային օրինակ և կառուցված են համապատասխան գրաֆիկներ

G. H. Babadjanian, L. E. Danielian

About nonstationary motion of real gas in pipes with penetrable walls

Рассматривается нестационарное движение реального газа в плоской и цилиндрической трубах с проницаемыми стенками. Задача сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые решаются методом интегральных преобразований. Определяются законы изменения давления, скорости, плотности, а также продольные и поперечные расходы газа как функции от времени и координаты точки. Вычислен конкретный числовой пример и построены графики соответствующих газодинамических параметров

1. Рассматривается одномерное, нестационарное изотермическое движение реального (вязкого) газа в трубах с проницаемыми стенками. Такие исследования, помимо теоретического значения, имеют и многие практические применения. Так, например, магистральные, промысловые и распределительные городские газопроводы, водопроводы и паропроводы часто работают при нестационарных режимах и имеют в ряде точек по длине трубопровода отбор или подкачку жидкости (газа). При исследовании таких задач дискретное распределение точек отбора (подкачки) можно во многих случаях заменить их непрерывным

распределением [1]. Поэтому исследование таких задач можно свести к изучению движения жидкости в трубах с проницаемыми стенками. В общем случае перепад давления, будучи переменным по длине и во времени, определяется потерями на трение, инерционным сопротивлением и разностью отметок трубопровода. Однако, для горизонтального, достаточно длинного газопровода с постоянным сечением, при движении газа с малой скоростью в уравнениях движения влиянием инерционного сопротивления, уклона трубопровода на изменение давления можно пренебречь [2].

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\xi\rho u^2}{D_1},\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+D_2\rho(p-p_h)=0 \qquad (1.1)$$

$$p-p_h=\rho zRT$$

В системе (1.1) первое уравнение – это уравнение движения; второе уравнение неразрывности с учетом отбора (отсоса) или подкачки (вдува); третье – уравнение состояния газа. В этой системе p, ρ и u – средние по сечению трубы давление, плотность и скорость газа, ξ – коэффициент сопротивления, p_h – внешнее давление, R – газовая постоянная, T – абсолютная температура, z – коэффициент сжимаемости газа, D_1 и D_2 – постоянные, зависящие от геометрических характеристик трубы и от степени проницаемости стенок. В формулах (1.1) при $p-p_h>0$ имеет место отсос жидкости, а при $p-p_h<0$ – вдувание.

Для плоской трубы $D_1=4h$, $D_2=\frac{k}{2h}$, а для цилиндрической $D_1=4a$, $D_2=\frac{2k}{a}$, где k – коэффициент проницаемости; $2h$ – ширина плоского канала; a – радиус трубы.

Известно, что при ламинарном режиме движения для плоской трубы $\xi=\frac{12\nu}{hu}$, а для цилиндрической $\xi=\frac{32\nu}{au}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости.

Исключая из системы (1.1) переменные $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ и вводя обозначение $(p(x,t)-p_h)^2=P(x,t)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{b}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{kP}{h} \qquad (1.2)$$

– для плоской трубы и

$$\frac{1}{\sqrt{P}}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{b_1}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{4kP}{a} \qquad (1.3)$$

для цилиндрической трубы.

Здесь $b=\frac{3\mu}{h^2}$, $b_1=\frac{8\mu}{a^2}$

где μ - динамический коэффициент вязкости

Поставленная нестационарная задача решается при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} &\text{при } x=0 \quad P=P_H=(p_H-p_b)^2 \\ &\text{при } x=L \quad \frac{\partial P}{\partial x}=0 \qquad (1.4) \\ &\text{при } t=0 \quad P=P_0(x) \end{aligned}$$

где p_H - давление в начальном сечении трубы; L - длина трубопровода; $P_0(x)$ - закон изменения квадрата давления при стационарном режиме работы.

Второе граничное условие системы (1.4) показывает, что в конце трубы расход газа прекращается мгновенно, вследствие чего и возникает нестационарный режим движения.

Таким образом, решение задачи сводится к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) с краевыми условиями (1.4).

2. Точное функциональное решение дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3) невозможно. Их решают численными или приближенными методами. Воспользуемся приближенным методом решения [3]. Для нахождения первого приближения примем переменный коэффициент при $\frac{\partial P}{\partial t}$ постоянным и равным среднему значению давления в трубе при стационарном режиме работы, т. е. $\sqrt{P}=p_{0ср}=\text{const}$. Тогда уравнения (1.2) и (1.3) примут следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=A_1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-A_2 P \qquad (2.1)$$

где $A_1=\frac{p_{0ср}}{b}=\frac{p_0 h^2}{3\mu}$, $A_2=\frac{kp_{0ср}}{h}$ для плоской трубы и

$A_1=\frac{p_0}{b_1}=\frac{p_0 a^2}{8\mu}$, $A_2=\frac{4kp_{0ср}}{a}$ - для цилиндрической трубы. Решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$P(x,t) = P_0(x) + P_1(x,t) \tag{2.2}$$

Из уравнения (2.1) получим два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 P_0}{dx^2} - \frac{A_2}{A_1} P_0 = 0 \tag{2.3}$$

и

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - A_2 P_1 \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) описывает стационарное движение газа со следующими граничными условиями:

при $x = 0 \quad P_0 = P_H = (p_H - p_{1_0})^2 = \text{const}$

при $x = 0 \quad \dfrac{dp_0}{dx} = -2b(p_H - p_{1_0})u_H = \text{const}$ (2.5)

Решением уравнения (2.3) при граничных условиях (2.5) будет

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch}\sqrt{\frac{kb}{h}}x - 2bu_H\sqrt{P_H}\sqrt{\frac{h}{kb}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{kb}{h}}x \tag{2.6}$$

для плоской трубы и

$$P_0(x) = P_H \operatorname{ch}\ 2\sqrt{\frac{kb_1}{a}}x - b_1u_H\sqrt{P_H}\sqrt{\frac{a}{kb_1}}\operatorname{sh}2\sqrt{\frac{kb_1}{a}}x \tag{2.7}$$

- для цилиндрической трубы.

Перейдем к решению уравнения (2.4).

Исходя из постановки задачи, при решении уравнения (2.4) нужно задавать следующие краевые условия

при $x = 0 \quad P_1 = 0$

при $x = L \quad \left.\dfrac{\partial P_1}{\partial x}\right|_{x=L} = -\left.\dfrac{\partial P_0}{\partial x}\right|_{x=L} = 2bu_H(p_H - p_{1_0})\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{kb}{h}}L -$

$$- P_H\sqrt{\frac{kb}{h}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{kb}{h}}L = B_1$$

при $t = 0 \quad P_1 = 0$ (2.8)

для плоской трубы и

при $x = 0 \quad P_1 = 0$

при $x = L$

$$\left.\frac{\partial P_1}{\partial x}\right|_{x=L} = -\left.\frac{\partial P_0}{\partial x}\right|_{x=L} = 2b_1u_H(p_H - p_{1_0})\operatorname{ch}2\sqrt{\frac{kb_1}{a}}L -$$

$$-2P_{II}\sqrt{\frac{kb_1}{a}}\,\mathrm{sh}\,2\sqrt{\frac{kb_1}{a}}L = B_2$$

при $t = 0 \quad P_1 = 0$ (2.9)

- для цилиндрической трубы.

Применяя к уравнению (2.4) и краевым условиям (2.8) преобразования Лапласа, получим

$$\frac{d^2\overline{P}_1}{dx^2} - \frac{A_2 + s}{A_1}\overline{P}_1 = 0 \tag{2.10}$$

при $x = 0 \quad \overline{P}_1 = 0$

при $x = L \quad \dfrac{d\overline{P}_1}{dx} = \dfrac{B_1}{s}$ (2.11)

где $\overline{P}_1 = \int_0^{\infty} e^{-st} P_1 dt$, s – параметр преобразования.

Решением уравнения (2.10) будет

$$\overline{P}_1 = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \tag{2.12}$$

здесь $\beta = \sqrt{\dfrac{s + A_2}{A_1}}$

С помощью граничных условий (2.11), определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2, решение дифференциального уравнения (2.10) примет вид:

$$\overline{P}_1 = \frac{B_1 \mathrm{sh}\beta x}{\beta s \mathrm{ch}\beta L} \tag{2.13}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и проведя все математические вычисления, для оригинала функции $P_1(x,t)$ получим следующие выражения:

$$P_1(x,t) = B_1\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}x}{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}L} + 2\frac{A_1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n x}{L}}{s_n \sin\mu_n}e^{s_n t}\right] \tag{2.14}$$

- для плоской трубы и

$$P_1(x,t) = B_2\left[\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}x}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}L} + 2\frac{A_1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n x}{L}e^{s_n t}}{s_n \sin\mu_n}\right] \tag{2.15}$$

для цилиндрической трубы

В формулах (2.14) и (2.15)

$$s_n = -A_2 - \frac{\mu_n^2 A_1}{L^2}, \qquad \mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi \tag{2.16}$$

Подставляя $P_0(x)$, $P_1(x,t)$ из формул (2.6), (2.7), (2.14) и (2.15) в равенство (2.2) и переходя к старым переменным, для давления газа окончательно получим

$$p(x,t) = p_{\text{п}} + \left\{(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})^2 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}x - \frac{6\mu}{h^2}(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})u_{\text{н}}\sqrt{\frac{h^3}{3\mu k}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}x + \right.$$

$$+\left[\frac{6\mu}{h^2}(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})u_{\text{н}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}L - (p_{\text{н}} - p_{\text{п}})^2\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}}L\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}x}{\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}}L} - \right. \tag{2.17}$$

$$\left.\left.-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{\pi}{L}\exp\left(-p_{0_{\text{ср}}}\left[\frac{k}{h}+\frac{h^2}{3\mu}\frac{(2n-1)^2}{L^2}\pi^2\right]t\right)}{\left(\frac{3\mu k}{h^3}+\frac{\mu_n^2}{L^2}\right)L}\right]\right\}^{1/2}$$

для плоской трубы и

$$p(x,t) = p_{\text{п}} + \left\{(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})^2 \operatorname{ch}2\sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}}x - \frac{8\mu}{a^2}u_{\text{н}}(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})\sqrt{\frac{a^3}{8\mu k}}\operatorname{sh}2\times\right.$$

$$\times\sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}}x + \left[\frac{8\mu}{a^2}u_{\text{н}}(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})\operatorname{ch}\sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}}L - 2(p_{\text{н}} - p_{\text{п}})^2\sqrt{\frac{8\mu k}{a^3}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{8\mu}{a^3}}L\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}}x}{\sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{32\mu k}{a^3}}L} - \right. \tag{2.18}$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2}\dfrac{x}{L}\exp\left(-p_{0кр}\left[\dfrac{4k}{a}+\dfrac{a^2}{8\mu L^2}\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}\right]t\right)}{\left(\dfrac{32\mu k}{a^3}+\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\right)L}\Bigg]\Bigg]^{1/2}$$

для цилиндрической трубы.

Скорость, плотность, продольный и поперечный расходы газа определяются по формулам

$$u(x,t)=-\frac{1}{b}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.19}$$

$$\rho(x,t)=\frac{p-p_h}{zRT} \tag{2.20}$$

$$G_{\text{прод}}(x,t)=2hu(x,t)\rho(x,t) \tag{2.21}$$

$$G_{\text{попер}}(x,t)=k(p-p_h)\rho(x,t) \tag{2.22}$$

для плоской трубы и

$$u(x,t)=-\frac{1}{b_1}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.23}$$

$$\rho(x,t)=\frac{p-p_h}{zRT} \tag{2.24}$$

$$G_{\text{прод}}(x,t)=\pi a^2\rho(x,t)u(x,t) \tag{2.25}$$

$$G_{\text{попер}}(x,t)=2\pi ak(p-p_h)\rho(x,t) \tag{2.26}$$

для цилиндрической трубы.

В формулах (2.21), (2.22), (2.25), (2.26) расходы вычислены в единице времени.

Для нахождения решения задачи во втором приближении переменный коэффициент $\sqrt{P}$ в уравнениях (1.2) и (1.3) примем в следующем виде

$$\sqrt{P}=p_H+(p_{0кр}-p_H)e^{-\frac{\lambda t}{2}}=p_{0кр}\left[\frac{p_H}{p_{0кр}}+\left(1-\frac{p_H}{p_{0кр}}\right)e^{-\frac{\lambda t}{2}}\right]=$$

$$=p_{0кр}f(t) \tag{2.27}$$

где λ – постоянная, зависящая от среднего давления, геометрических характеристик трубы и степени проницаемости стенок.

$\lambda = \frac{p_0 k}{h}$ для плоской трубы и $\lambda = \frac{4 p_0 k}{a}$ для цилиндрической трубы [3].

Выбор переменного коэффициента $\sqrt{P}$ в виде (2.27) обосновывается тем, что при $t \to \infty$ давление в трубе стремится к давлению в начальном сечении ($p(x,\infty) \to p_н$), а при $t \to 0$ – к среднему давлению стационарного режима движения газа ($p(x,0) \to p_{0ср}$)

Подставляя (2.27) в уравнение (1.2) и (1.3), получим

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0ср}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{k p_{0ср}}{h} P \qquad (2.28)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{p_{0ср}}{b_1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{4 k p_{0ср}}{a} P \qquad (2.29)$$

где

$$\tau = \int_0^t f(t)dt = \frac{p_н}{p_{0ср}} t + \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{p_н}{p_{0ср}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\lambda t}{2}}\right) \qquad (2.30)$$

Как видно, уравнение (2.28) и (2.29) отличаются от соответствующих уравнений (1.2) и (1.3) тем, что в них переменная t заменяется на τ с помощью выражения (2.30). Поэтому для нахождения решения задачи во втором приближении достаточно в формулах (2.17)-(2.26) переменную t заменить на τ, определяемую формулой (2.30).

Можно построить решение задачи и в третьем приближении, принимая переменный коэффициент $\sqrt{P}$ в уравнениях (1.2) и (1.3) в следующем виде:

$$\sqrt{P} = p_{0ср} f(t) \varphi(x) \qquad (2.31)$$

где $f(t)$ определяется по формуле (2.27), а $\varphi(x)$ – известная функция, обусловленная законом распределения давления при стационарном режиме работы. Однако, нахождение решения в третьем приближении в данной работе не приводится, так как оно связано с большими математическими трудностями и вычислениями.

Отметим, что если в формулах (2.17) – (2.30) принять $k = 0$, то получим выражения, описывающие закономерности нестационарного движения газа в трубах со сплошными стенками.

3. Приведем численный пример для движения газа в цилиндрической трубе.

Для решения конкретного числового примера зададим следующие данные:

$p_н = 5$ атм. $u_н = 10$ м/сек., $L = 10^3$ м, $a = 0.4$ м

$k = 6\ 10^{-4}$ м^3/кг сек, $\mu = 10^{-5}$ кг сек/м^2

Предварительно вычислив $P_{0,p}$ по формуле

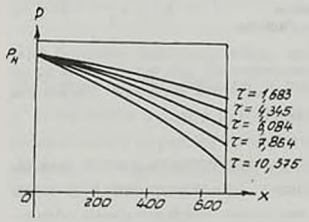
$$P_{0,p} = \frac{1}{L}\int_0^L P_0(x)dx$$

получаем $p_{0,p} = 2{,}76$.

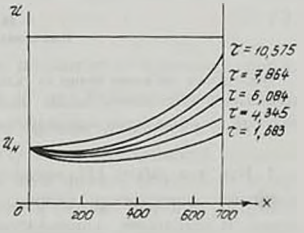
Численный пример вычисляется, ограничиваясь вторым приближением.

Изменения давления и скорости вычисляются соответственно по формулам (2.18) и (2.23).

Распределения давления вдоль трубопровода в различные моменты времени приведены на фиг.1, а графики изменения скорости по времени и вдоль трубопровода приведены на фиг. 2.



Фиг 1



Фиг.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабровский С.А., Щербаков С.Г., Гусейн Заде М.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором. М.: Изд. Наука, 1972. 48 с.
2. Бабаджанян Г.А., Даниелян Л.Е. Неустановившееся движение реального газа в цилиндрической трубе с проницаемыми стенками. Изв. АН АрмССР, Механика, 1971, т. 24, N 6, с. 3-13.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 11. М.: Изд. АН СССР, 1953. 273 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 23.02.1995