

ВОЛНЫ, ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВДОЛЬ КРОМКИ
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ТОНКОЙ
ПЛАСТИНКИ

Самвелян Л. А.

Լ. Ա. Սամվելյան

Նախապես շարված թարակ սալի եզրով տեղայնացված ալիքներ

Գիտարկվում է կիսաանվերջ սալ, որը ծրված է անվերջությունում կիրարկատառված սալապատ-րաչալի բաշխված ուժով Ռստուննասիրվում է այդ սալի ազատ եզրով տեղայնացված ալիքների տարածումը Ցույց է տրված, որ հնարավոր են երկու տեսակի ալիքների տարածում, ինչպես Ուելի տիպի, այնպես եւ մաքուր ծոծան մտացված են նշված ալիքների զոլություն պայմանները

L A Sumvelian

The waves which are localized along initially stressed thin plate edge

Известно, что вдоль торца полубесконечной тонкой пластинки могут распространяться упругие поверхностные волны как типа Релея, так и чисто изгибные [1,2]. В настоящей работе исследуется влияние предварительного однородного растяжения (сжатия) на скорости поверхностных волн

1. Пусть пластинка занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Пластинка предварительно растянута (сжата) по направлению оси ox , так что начальное состояние пластинки определяется однородным напряженным состоянием, для которого $\sigma_{11}^0 = \sigma_0 = \text{const}$ ($\sigma_0 > 0$ при растяжении, $\sigma_0 < 0$ при сжатии), а остальные компоненты тензора напряжений тождественно равны нулю.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза Кирхгофа, согласно которой задача обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба пластинки. При этом уравнения колебаний обобщенного плоского напряженного состояния пластинки относительно перемещений u, v срединной поверхности пластинки имеют вид

$$\Delta u + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_0}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Delta v + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_0}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, ρ — плотность материала пластинки.

Изгибные колебания пластинки описываются следующим уравнением

$$D \Delta^2 w - 2h\sigma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

При помощи преобразования

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

система уравнений (1.1) приводится к раздельным уравнениям относительно φ и ψ

$$c_1^2 \Delta \varphi \pm c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta \psi \pm c_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.4)$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_0^2 = \frac{|\sigma_0|}{\rho}$$

Решения уравнений (1.4), удовлетворяющие условиям затухания амплитуды волны при $y \rightarrow \infty$, имеют вид

$$\varphi = A e^{-kx} \exp i(\omega t - kx), \quad \psi = B e^{-k_2 y} e^{i(\omega t - kx)} \quad (1.5)$$

где

$$v_1^2 = 1 + \theta(\theta_1 - \eta), \quad v_2^2 = 1 + \theta_1 - \eta, \quad k > 0,$$

$$\theta = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-\nu}{2}, \quad \theta_1 = \pm \frac{c_0^2}{c_2^2}, \quad \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \quad \theta < 1, \quad |\theta_1| < 1 \quad (1.6)$$

Из условия $v_1^2 > 0$, $v_2^2 > 0$ следует, что искомый параметр η , характеризующий скорость поверхностной волны, должен удовлетворять условию

$$0 < \eta < 1 + \theta_1 \quad (1.7)$$

В случае, когда при $y = 0$ удовлетворяются условия свободного края пластинки, характеристическое уравнение, определяющее скорость локализованной волны, имеет вид

$$R(\eta) = \left[2 + (\theta_1 - \eta) \right]^2 - 4\sqrt{1 + \theta(\theta_1 - \eta)} \sqrt{1 + (\theta_1 - \eta)} = 0 \quad (1.8)$$

Очевидно, что уравнение (1.8) заменой $\eta_1 = \eta - \theta_1$ приводится к уравнению Рэлея. Отсюда следует, что при $\theta_1 < 0$ уравнение (1.8) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (1.7). При

$\theta_1 > 0$ уравнение (1.8) имеет два решения $\eta = \theta_1$ и $\eta = \eta_R$. Легко показать, что решение $\eta = \theta_1$ — тривиальное решение ($u = v = 0$). В частности, если $\theta = 1/3$ ($v = 1/3$), скорость поверхностной волны определяется следующим образом

$$\eta = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} + \theta_1$$

Легко показать, что в случаях граничных условий закрепления края пластинки, либо условий закрепления края, либо условий Навье, локализованная волна вдоль края пластинки не может существовать.

2. Рассмотрим изгибные волны, локализованные вдоль края $y = 0$ пластинки. Имея в виду требования затухания, решение уравнения (1.2) представляется в виде

$$w = (Ae^{-i\alpha_1 y} + Be^{-i\alpha_2 y}) \exp i(\omega x - kx) \quad (2.1)$$

где

$$\alpha_1^2 = 1 + \sqrt{\xi^2 - \gamma}, \quad \alpha_2^2 = 1 - \sqrt{\xi^2 - \gamma} \quad (2.2)$$

$$\xi^2 = \frac{2\rho h \omega^2}{Dk^2}, \quad \gamma = \frac{2h\sigma_0}{Dk^2}$$

Для того, что решение (2.1) было затухающим при $y \rightarrow \infty$, необходимо выполнение условия

$$0 \leq \xi^2 < 1 + \gamma \quad (2.3)$$

Отсюда, очевидно, что на параметр γ следует наложить ограничение $\gamma > -1$, т.к. при $\gamma \leq -1$ (при сжатии) соответствующая форма волны будет неустойчивой.

Граничные условия для свободного края пластинки $y = 0$ (равенство нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы) имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.4)$$

Подставляя решение (2.1) в (2.4), получим систему линейных однородных уравнений относительно произвольных постоянных A, B . Приравняв детерминант указанной системы уравнений нулю, после некоторых преобразований получим дисперсионное уравнение, определяющее скорость поверхностной изгибной волны

$$K_1(\eta) = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2(1 - \nu) \alpha_1 \alpha_2 - \nu^2 = 0 \quad (2.5)$$

Аналогичного вида дисперсионное уравнение получено также в [4]. Определение скорости поверхностной волны фактически приводится к исследованию корней квадратного уравнения (2.5) относительно α_1, α_2 . Отсюда легко получить, что при $\gamma \geq 0$ (растяжении) уравнение (2.5) всегда имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (2.3). При этом соответствующий корень находится в промежутке $(\gamma, 1 + \gamma)$, откуда следует, что выражения (2.2) для α_1 и α_2 действительны. Следовательно, амплитуда волны (2.1) затухает по глубине без колебаний. В случае $-1 < \gamma < 0$ (сжатие), изгибная поверхностная волна существует не для всех γ . Условие существования определяется следующим образом:

$$\gamma > -2 + v + \sqrt{(1-v)^2 + v^2} \quad (2.6)$$

Например, при $v = 0$ должно выполняться условие $\gamma > -1$, что совпадает с ограничением на устойчивость, при $v = \frac{1}{3}$ и $v = \frac{1}{2}$ соответственно, $\gamma > -0.92$ и $\gamma > -0.8$.

Можно показать, что при других классических граничных условиях на краю $y = 0$ поверхностная волна не существует.

3 Пусть полубесконечная пластинка занимает область $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-h \leq z \leq h$. Рассмотрим волны, локализованные вдоль края $X = 0$, где приложена предварительно растягивающая (сжимающая) нагрузка. Решение уравнения (1.2), с учетом требования затухания амплитуды волны, при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$w = (Ae^{-i\beta_1 x} + Be^{-i\beta_2 x}) \exp(i\omega t - ky) \quad (3.1)$$

где

$$\beta_{1,2} = 1 + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\xi^2 + \gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (3.2)$$

Условие затухания решения (3.1) при $x \rightarrow 0$ имеет вид

$$0 < \xi^2 < 1 \quad (3.3)$$

На краю $x = 0$ принимаются условия равенства нулю изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы. Эти условия записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2h\sigma_0}{D} w \right] = 0$$

где $\sigma_0 = \sigma_0$ в случае консервативной нагрузки на краю $x = 0$,
 $\sigma_0 = 0$ в случае следующей нагрузки.

Требование, чтобы решение (3.1) удовлетворяло граничным условиям (3.4), приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$K(\xi) = \beta_1^2 \beta_2^2 + [2(1 - \nu) + \gamma_0] \beta_1 \beta_2 - \nu(\nu + \gamma - \gamma_0) = 0 \quad (3.5)$$

здесь $\gamma_0 = \gamma$ для консервативной, $\gamma_0 = 0$ для следующей нагрузки

Исследование уравнения (3.5) при условии (3.3) показывает, что изгибная поверхностная волна всегда существует (с учетом $\gamma > -1$) и в случае консервативной нагрузки ($\gamma_0 = \gamma$). В случае же следующей нагрузки, необходимое и достаточное условие существования поверхностной волны получается в виде

$$-\nu < \gamma < \frac{(3 + \nu)(1 - \nu)}{\nu} \quad (3.6)$$

Следует отметить, что в случае растяжения ($\gamma > 0$), при проверке выполнения правой части неравенства (3.6), необходимо также сравнение с условием прочности

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Голчаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 336 с.
2. Коненков Ю. К. Об изгибной волне "рэлеевского" типа. Акуст. ж., 1960, т. 6 в. 1, с. 124-126.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин (Прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, 1987. 360 с.
4. Белубекий В. М., Белубекий М. В. Об изгибной волне, локализованной вдоль кромки токонесущей пластинки. В сб.: Инженерно-физические проблемы новой техники. Изд. МГТУ, 1992, с. 58-59.