ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Бабаджанян Г.А.

Գ.Հ.Բաբաջանյան

Մածուցիկ հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը զուգահեռ շարժվող հարթությունների միջև

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկու զուգահեռ հարթությունների միջև գտնվող մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժումը, որը պայմանավորված է հարթությունների հանգստի վիճակից նրանց հարթ զուգահեռ, հաստատուն արագությամբ շարժմամբ

Որոշվում է հեղուկի արագության, շփման ուժի փոփոխման օրենքները, որպես Y և t-փոփոխականների ֆունկցիա. Լուծված խնդրի արդյունքները ավելի ընդհանուր են և նրանցից կարելի է ստանալ լուծումներ տարբեր մասնավոր դեպքերի համար. Ուսումնասիրությունն ունի տեսական և գործնական հետաքրքրություն

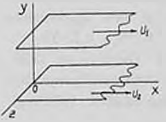
G.H.Babadjanian

Nonstationary motion of viscous liquid between parallel moving planes

Исследуется нестационарное ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельно движущимися плоскостями. Нестационарность движения жидкости обусловлена внезапным смещением плоскостей из состояния покоя.

Найдены законы изменения скорости и силы трения на стенках и между слоями жидкости, зависящих от времени и координат

1. Рассматривается нестационарное изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями, совершающими плоско-параллельное поступательное движение с заданными постоянными скоростями, из состояния покоя. При этом вязкая неподвижная жидкость, заполняющая всё пространство между плоскостями, получает мгновенное разгонное движение, обусловленное движением плоскостей. Требуется найти закономерности развивающегося со временем движение жидкости при условии, что плоскости, неограниченные по осям x и z, движутся в своих плоскостях со скоростями U_1 и U_2 вдоль оси Ox в одну сторону и расположены друг от друга на расстоянии h (фиг. 1).



Фиг 1

Принимая движение частиц жидкости прямолинейным и направленным вдоль оси Ox, пренебрегая силой тяжести, считая давление всюду постоянным, уравнения движения, начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

при $t = 0 \quad y > 0, \quad u = 0$

при $t > 0 \quad y = 0, \quad u = U_2$ (1.2)

при $t > 0 \quad y = h, \quad u = U_1$

где u скорость движения частиц жидкости, ν кинематический коэффициент вязкости.

2.Задача решается методом операционного исчисления. Выполняя преобразование Лапласа над дифференциальным уравнением (1.1), начальными и граничными условиями (1.2) по переменному t, получим

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \frac{\lambda}{\nu}\bar{u} = 0 \tag{2.1}$$

при $y = 0 \quad \bar{u} = \frac{U_2}{\lambda}$

при $y = h \quad \bar{u} = \frac{U_1}{\lambda}$ (2.2)

Здесь $\bar{u} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u dt$, а λ -параметр преобразования. Интегрируя

дифферециальные уравнения (2.1), получим общее решение в виде

$$\bar{u} = C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y} \tag{2.3}$$

где $\beta = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}$

Определяя по условиям (2.2) постоянные интегрирования C_1 и C_2, для изображения искомой функции $\bar{u}(y,\lambda)$ получим

$$\bar{u}(y,\lambda) = \frac{U_1 \mathrm{Sh}\beta y}{\lambda \mathrm{Sh}\beta h} + \frac{U_2 \mathrm{Sh}\beta(h-y)}{\lambda \mathrm{Sh}\beta h} \tag{2.4}$$

Совершая обратное преобразование Лапласа для оригинала искомой функции $u(y,t)$, будем иметь

$$u(y,t) = U_1\left[\frac{y}{h} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)}{n}\right] +$$

$$+U_2\left[\frac{h-y}{h}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi(h-y)}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)}{n}\right] \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) описывает закон изменения скорости течения жидкости между рассматриваемыми плоскостями. Легко убедиться, что величина $u(y,t)$, определяемая формулой (2.5), удовлетворяет начальному и граничным условиям (1.2). Действительно, $u(y,t)$ обращается в нуль при $t=0$, так как известно, что [1]

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi y}{h}}{n}=-\frac{y}{h}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \operatorname{Sin}\frac{n\pi(h-y)}{h}}{n}=-\frac{h-y}{h} \qquad (2.6)$$

Из этого следует, что ряды, стоящие в правой части (2.5), равномерно сходятся, так как каждый из его членов по модулю меньше соответствующего члена в (2.6). что касается выполнения граничных условии, то легко проверить, что из (2.5) при $y=0$ $u=U_2$ и при $y=h$ $u=U_1$. При стремлении t к бесконечности, распределение скорости становится линейным, т.е

$$\lim_{t\to\infty}u(y,t)=\frac{y}{h}(U_1-U_2)+U_2 \qquad (2.7)$$

Для силы трения из (2.5) получим

$$\tau=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi y}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-\right.$$

$$\left.-U_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi(h-y)}{h}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.8)$$

Силы трения на нижней $(y=0)$ и верхней $(y=h)$ плоскостях будет

$$\tau_{ниж}=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-U_2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.9)$$

$$\tau_{вер}=\frac{\mu}{h}(U_1-U_2)+\frac{2\mu}{h^2}\left[U_1\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)-U_2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\right] \qquad (2.10)$$

Как видно из формул (2.9) и (2.10), для начального момента $t=0$ силы трения на подвижных стенках обращаются в бесконечность. В последую щем они будут убывать, стремясь к общему пределу

$$\tau = \frac{\mu}{h}\left(U_1 - U_2\right) \qquad (2.11)$$

Такое поведение сил трения на стенках свидетельствует о наличии явления удара плоскостей по жидкости в начале движения. Полученный результат не является стандартным и будет представлять практический интерес. Отметим, что из формул (2.5) – (2.11) можно получить соответствующие результаты для частных случаев [2], [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжик И.М. и Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951. 52с.
2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951. 101с.
3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехтеориздат, 1955. 319с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 74с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 14.11.1994