ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРОНИКАНИЯ ТВЕРДОГО КОНУСА В ПЕРВОНАЧАЛЬНО-УПРУГУЮ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Асатрян В.Л., Багдоев А.Г., Ванцян А.А.

Վ.Լ.Ասատրյան, Ա.Գ.Բագդոև, Ա.Ա.Վանցյան

Նախապես առաձգական տրանսվերսալ - իզոտրոպ միջավայր անվերջ կոշտ կոնի ներթափանցման դինամիկ խնդրի լուծումը:

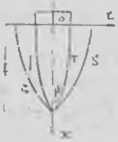
Հարթ կտրվածքների վարկածի հիման վրա լուծված է անվերջ կոշտ կոնի ներթափանցման դինամիկ խնդիրը: Ցույց է տրված դինամիկ անդամների և միջավայրի անիզոտրոպիայի ազդեցությունը ներթափանցման պրոցեսի վրա

V. L. Asatryan, A.G.Bagdoev, A.A.Vantsyan

The solution of dynamic problem of penetration of rigid cone into initially elastic transversal - isotropic medium

Рассматривается задача проникания твердого бесконечного конуса в трансверсально-изотропную среду по гипотезе плоских сечений. Показано влияние динамических членов и анизотропии среды на процесс проникания

Рассматривается задача проникания твердого бесконечного конуса в трансверсально-изотропную среду по гипотезе плоских сечений. Задача проникания тонкого твердого тела в анизотропную среду в квазистатической постановке решена в [1]. Для изотропной среды динамическая задача проникания твердого индентора решена в [2].



Фиг 1

В рассматриваемой модели проникания вводится поверхность разрушения, впереди которой среда упругая, а позади нее пластическая. Если рассматривать среду, подчиняющуюся уравнениям Прандтля-Рейса, то следует полагать

$\dot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\mu}\dot s_{ij} + \frac{\varepsilon_s}{\tau_s}s_{ij}$, где для простоты взята изотропная среда (μ – модуль сдвига). Предполагая $\frac{\tau_s}{\mu\varepsilon_s}\frac{d}{dt} << 1$, т.е. считая задачу квазистатической, можно получить уравнения пластического течения. Из результатов, полученных для данной среды, следует [1] $\varepsilon_s = 2\frac{v_r}{r} = 2\frac{r_1}{r^2}\frac{\partial r_1}{\partial t}$, тогда получится для порядков величин $\frac{\tau_s}{\mu}\frac{r^2}{2r_1^2} << 1$. При $r/r_1 \sim 1$, в силу малости, τ_s/μ можно в уравнениях течения пренебречь первым слагаемым, что выполняется в области пластичности на некотором удалении от поверхности разрушения. При $\frac{r^2}{r_1^2} \sim \frac{\mu}{\tau_s}$, т.е. вблизи поверхности разрушения, следует удерживать все слагаемые. Таким путем, мы обосновываем правильность использования уравнений идеальной теории пластичности вблизи тела, а вдали от него следует сращивать решение с упругим решением. Такая модель принята в квазистатической по терминологии [6] задаче, которая соответствует идеальной пластичности. То, что принимается модель идеальной пластичности позади фронта разрушения, сделано в указанной статье и в статьях А. Я. Сагомоняна.

Вначале рассматривается задача для тела формы криволинейного конуса, переходящего в цилиндр, уравнение которого берется в форме

$$r_1 = r_0 - \beta(\zeta - f + x)^{\nu} \tag{1}$$

где ось ox направлена вдоль направления проникания, $r_0 = \beta\zeta^{\nu}$ есть радиус цилиндрической части тела, f – глубина проникания, ζ – высота конуса, $\nu > 1$, β – постоянная, (фиг. 1). Как и в [1], радиальная скорость частиц при выполнении гипотезы плоских сечений имеет вид [1]

$$v_r = \frac{r_1}{r}\frac{\partial r_1}{\partial t} \tag{2}$$

откуда с учетом (1)

$$\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt} &= \frac{\beta^2\nu^2}{r}(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2 + \frac{r_1}{r}\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}f'' - \\ &-\beta\nu(\nu-1)\frac{r_1}{r}(\zeta - f + x)^{\nu-2}f'^2 - \frac{r_1^2}{r^3}\beta^2\nu^2(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2\end{aligned} \tag{3}$$

В области пластичности вблизи индектора можно записать для связи тензора скоростей деформаций и тензора напряжений [5]

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \bar{a}\left[H(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + G(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})\right]$$
$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \bar{a}\left[H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\right] \qquad (4)$$
$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \bar{a}\left[G(\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})\right]$$

Условие текучести Мизеса записывается в виде

$$H(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + G(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 = 1 \qquad (5)$$

В (4) и (5) F, G, H даются формулами

$$2F = \frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2} + \frac{1}{\tau_{zz}^2} - \frac{1}{\tau_{rr}^2}, \quad 2G = \frac{1}{\tau_{zz}^2} + \frac{1}{\tau_{rr}^2} - \frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2}, \quad 2H = \frac{1}{\tau_{rr}^2} + \frac{1}{\tau_{\theta\theta}^2} - \frac{1}{\tau_{zz}^2} \qquad (6)$$

где τ_{zz}, τ_{rr}, $\tau_{\theta\theta}$ пределы текучести в соответствующих направлениях, величина $\bar{a}$ в формулах (4) подлежит определению.

Согласно гипотезе плоских сечений $\dot{\varepsilon}_{zz} \approx 0$ и из (4) можно получить

$$\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{G}{F}(\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \qquad (7)$$

Вводя девиаторы напряжения $\sigma_{zz} - \sigma = \sigma_{zz}$, $\sigma_{rr} - \sigma = \sigma_{rr}$,

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma = \sigma_{\theta\theta}, \text{ где } 3\sigma = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \qquad (8)$$

систему уравнений (4) можно записать в виде

$$\sigma_{zz} + \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 0$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} + \frac{G}{F}(\sigma_{rr} - \sigma_{zz}) \qquad (9)$$
$$\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}} = H(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + F(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})$$

и обозначая

$$\sigma_{rr} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\bar{\sigma}_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\bar{\sigma}_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\bar{\sigma}_{zz} \qquad (10)$$

условие текучести Мизеса можно переписать в виде

$$H(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\theta\theta})^2 + G(\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{zz})^2 + F(\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{zz})^2 = \frac{\bar{a}^2}{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^2} \qquad (11)$$

Из (9) можно получить

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{F - G}{\alpha}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{2F + G}{-\alpha}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{2G + F}{\alpha} \qquad (12)$$

где $\alpha = 3(GF + GH + FH)$

Для определения неизвестного $\bar{a}$ и (4) из (11) и (12) следует

$$\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^2}{\bar{a}^2} = \frac{\alpha}{3(G+F)} \tag{13}$$

Из уравнения движения, записанного из предположения гипотезы плоских сечений

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt} \tag{14}$$

и из соотношений (10), (12) можно получить

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} - \sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}\frac{1}{r} = \rho\frac{dv_r}{dt} \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (15) с учетом (3), получим

$$\sigma_{rr} = \sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}\ln r + A\ln r - \frac{B}{2r^2} + c_1, \tag{16}$$

где

$$A = \rho\beta^2\nu^2(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2 + \rho r_1\beta\nu(\zeta - f + x)^{\nu-1}f'' -$$

$$-\rho\beta\nu(\nu-1)r_1(\zeta - f + x)^{\nu-2}f'^2$$

$$B = -\rho r_1^2\beta^2\nu^2(\zeta - f + x)^{2(\nu-1)}f'^2$$

c_1 — постоянная интегрирования.

Из (16) видно, что для среды, в которой $\alpha \to 0$, $\sigma_{rr} \to \infty$. Причиной особого поведения σ_{rr} при $\alpha \to 0$, также для общего случая без гипотезы плоских сечений, является нарушение условий выпуклости поверхности текучести (11).

Записав соотношения (4) в виде

$$\sigma_{rr} = -\frac{(2F+G)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (2F+H)\varepsilon_{zz}/\bar{a}}{\alpha};$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(2G+F)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (F-H)\varepsilon_{zz}/\bar{a}}{\alpha}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{(F-G)\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a} + (F+2H)\varepsilon_{zz}/\bar{a}}{\alpha} \tag{17}$$

и ограничиваясь случаем трансверсальной изотропной среды, для которой

$$F = G = \frac{1}{2\tau_{zz}^2}, \quad H = \frac{1}{\tau_{rr}^2} - \frac{1}{2\tau_{zz}^2}, \quad \alpha = \frac{3}{\tau_{zz}^2}\left(\frac{1}{\tau_{rr}^2} - \frac{1}{4\tau_{zz}^2}\right)$$

условие текучести Мизеса (5) можно в плоскости ε_{zz} $\varepsilon_{\theta\theta}$ записать в виде

$$\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\bar{a}}-\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\right)^2+\frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{\bar{a}}\frac{\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{a}}\left(4-\frac{\tau_{rr}^2}{\tau_{xx}^2}\right)=\frac{1}{\tau_{xx}^2}\left(1-\frac{\tau_{rr}^2}{4\tau_{xx}^2}\right) \tag{18}$$

Уравнение (18) в переменных $\varepsilon_{11}/\bar{a}$, $\varepsilon_{\theta\theta}/\bar{a}$ даст в случае $\tau_{rr}=2\tau_{11}$ замкнутую кривую, а в случае $\tau_{rr}>2\tau_{11}$ гиперболу

В случае $\tau_{rr}=2\tau_{11}$ получается вырожденное уравнение $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{\theta\theta}$ Таким образом, при $\tau_{rr}\geq 2\tau_{11}$ условие пластичности для выпуклой кривой нарушается, что приводит при $\tau_{rr}\to 2\tau_{11}$ к бесконечным и при $\tau_{rr}>2\tau_{11}$ к мнимым напряжениям Тем не менее, при $\tau_{rr}-2\tau_{11}$ малом, но конечном, получается эффект значительного увеличения сопротивления среды и уменьшения глубины проникания

В [4] исследуется случай отклонения решения от значений, полученных по гипотезе плоских сечений Как выяснилось, и в данной в [4] постановке получается при $\tau_{rr}\to 2\tau_{11}$ бесконечные напряжения, что, как показано выше, связано с невыполнением условия выпуклости поверхности (кривой) пластичности

В упругой области между напряжениями и деформациями имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=a_{11}\varepsilon_{rr}+a_{12}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{r\theta}=a_{44}\varepsilon_{r\theta} \quad \varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}\\
&\sigma_{\theta\theta}=a_{12}\varepsilon_{rr}+a_{22}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{rx}=a_{55}\varepsilon_{rx}\\
&\sigma_{11}=a_{13}\varepsilon_{rr}+a_{23}\varepsilon_{\theta\theta} \quad \sigma_{\theta x}=a_{66}\varepsilon_{\theta x} \quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}
\end{aligned} \tag{19}$$

В силу того, что скорость упругих волн намного больше, чем скорость проникания, то в упругой области инерционными членами можно пренебречь Подставляя (19) в уравнение равновесия, можно записать

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{a_{22}}{a_{11}}\frac{u_r}{r^2}=0 \tag{20}$$

решение которого находится в виде

$$u_r=cr^n \qquad n=-\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{21}$$

Используя (19), (21) и (16), можно получить

$$\sigma_{rr}=\left[\sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}}+A\right]\ln\frac{r}{r_k\xi_0}+\frac{B}{2}\left(\frac{1}{r_k^2\xi_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\sigma_{rr}^e \tag{22}$$

где $r=r_k\xi_0$ уравнение фронта пластичности S; σ_{rr}^e напряжение из упругой области при $r=r_k\xi_0$ Для определения ξ_0, подставляя (19) в условие текучести Мизеса, с учетом (21), получим

$$H(a_{11}n - a_{12}n + a_{12} - a_{22})^2 + G(a_{11}n - a_{13}n + a_{32} - a_{31})^2 +$$
$$+E(a_{13}n - a_{11}n + a_{32} - a_{21}) = \frac{1}{c^{3}r_i^{2(n-1)}\xi_0^{2(n+1)}} = \bar{c} \qquad (23)$$

Подставляя σ'_{rr}, записанное с учетом (21), (19), и используя (23) для σ_{rr} при $r = r_i$, следует получить

$$\sigma_{rr} = -\left[\sqrt{\frac{3(G+F)}{\alpha}} + A\right]\ln\xi_0 + (a_{11}n + a_{12})c^{-\frac{1}{2}} + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{r_i^2\xi_0^2} - \frac{1}{r_i^2}\right) \qquad (24)$$

Используя непрерывность скоростей на фронте $r = r_i\xi_0$

$$\frac{1}{\xi_0}\frac{\partial r_i}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t}r_i^n\xi_0^n, \qquad \bar{c} = \frac{1}{\xi_0^{n+1}}\frac{r_i^{1-n}}{1-n}$$

и с учетом (23) для определения ξ_0 получим

$$\xi_0^4 = \frac{\bar{c}}{(1-n)^2}$$

Для трансверсально-изотропной среды $F = G$ или $\tau_{rr} = \tau_{r\theta}$,

$a_{11} = a_{22} = \lambda + 2\mu$, $n = -1$, $a_{12} = \lambda$, $a_{13} = a_{23}$, $a_{44} = \mu$,

$a_{55} = a_{66}$, где λ, μ — коэффициенты Ламе.

$\bar{c} = 8\mu^2(F + 2H)$, $\xi_0^4 = 2\mu^2(F + 2H)$, $\alpha = 3(F^2 + 2FH)$

Подставляя $\bar{c}$ в (24), для σ_{rr} на теле получится

$$\sigma_{rr} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{F+2H}} + A\right)\ln 2\mu^2(F+2H) - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{F+2H}} +$$
$$+\frac{B}{2r_i^2}\left[\frac{1}{\xi_0^2} - 1\right] \qquad (25)$$

Для трансверсально "изотропной" среды, где $\tau_{rr} = \tau_{r\theta}$

$$F + 2H = 2\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{ss}^2}\right), \quad \mu^2\left(\frac{1}{\tau_{sr}^2} - \frac{1}{4\tau_{ss}^2}\right) > 1$$

что выполняется для металлов, следовательно, $\sigma_{rr} \to -\infty$ [1, 3, 4]

Поэтому для сред со свойством $\tau_{rr} = 2\tau_{rt}$ глубина проникания за счет анизотропии уменьшается, что наблюдается экспериментально на опытах со слоистыми композитами [4].

Сила сопротивления проникание имеет вид

$$P = 2\pi\int_0^R r_i\left(-\frac{\partial r_i}{\partial x} + k_1\right)(-\sigma_{xx})dx \qquad (26)$$

где для конуса $\nu = 1$, $r_i = \beta(f - x)$; k_1 коэффициент трения

Подставляя (25) в (26), с учетом (10), для конуса

$$P = A_1 f^2 + A_2 f^2 f'^2 + A_3 f^3 f''$$

где

$$A_1 = \beta(\beta + k_1)\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2}{F+2H}}\left[2 + \ln 2\mu^2(F+2H)\right]$$

$$A_2 = \beta'(\beta + k_1)\frac{\pi}{4}\rho\left[2\frac{1-\zeta_0^2}{\xi_0^2} + \ln 2\mu^2(F+2H)\right]$$

$$A_3 = \beta'(\beta + k_1)\frac{\pi}{6}\rho\ln 2\mu^2(F+2H)$$

Записав уравнение движения $mf'' = -P$, m масса конуса и вводя обозначение $f'^2 = p(f)$, можно получить уравнение

$$-(m + A_3 f^3)p = 2(A_1 + A_2 p)f^2$$

Интегрируя, используя начальное условие $t = 0$, $p = v_0^2$ для f'^2, получим

$$f'^2 = -\frac{A_1}{A_2} + \left(v_0^2 + \frac{A_1}{A_2}\right)\left(1 + \frac{A_3 f^3}{m}\right)^{-\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_3}}$$

Максимальная глубина проникания, с учетом того, что при $f = f_{max}$, $f' = 0$, дается формулой

$$f_{max}^3 = \frac{m}{A_3}\left[\left(\frac{A_1}{A_1 + A_2 v_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}\frac{A_3}{A_2}} - 1\right]$$

Ускорение тела дается в виде

$$f'' = -\left(v_0^2 + \frac{A_1}{A_2}\right)\frac{A_2}{m}f^2\left(1 + \frac{A_3}{m}f^3\right)^{-\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_3}-1}$$

Ниже приведены графики $f'(k, f, \beta)$, $f''(k, f, \beta)$, $f_{max}(k, \beta)$, где $k = \tau_{u} / \tau_{M}$

Фиг. 2

1 β=0.22; 2 β=0,6, 3 β=1, 4 β=5

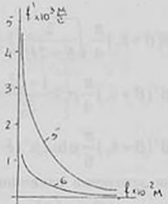
На фиг. 2 приведены зависимости $f(k)$ для разных β. Зависимость скорости проникания от координаты x при разных β и k приведена на фиг 3 и 4. Как видно из фиг 3 и 4, при $k \to 2$ имеет место сильное затухание скорости. Зависимость $f(k)$ для разных β показывает, что для $\beta > 1$ характер изменения скорости по глубине сильно отличается для случаев $\beta < 1$

Фиг. 3

K = 1,6 ÷ 1,99; для β=0,22;

для 8 β=0,6;

для 16 β=5



Фиг. 4

K = 1,6 ÷ 1,99; для β=100,

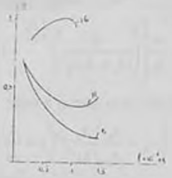
для 6 β=1000

Аналогичное явление в зависимости ускорения от координаты x имеет место для разных β Как видно из фиг 5, при $\beta \geq 1$ зависимость $f''(f)$ имеет экстремальный характер (кривая 11 ÷ 14)

Фиг. 5

K=1,6 ÷ 1,99 для β=0,22,

для 13 β=1



Фиг. 6

K= 1 ÷ 1,99 для β=0,22;

для 6 β=0,6 ;

для 11 β=1 ;

для 16 β= 5

Расчеты показывают, что для тупых тел замедление проникающего тела в дюраль имеет большое значение в начальной стадии $\left(f'' - 270 \cdot 10^{6} м/сек^{2}\right.$ при $\left.\beta = 5 \div 10\right)$ Для более тупых тел β -100, 1000, 1700 основное замедление имеет место на малых глубинах, следовательно, инерционные члены основную роль играют при поверхностном слое в начальной стадии проникания. Все данные на графиках взяты в системе СИ.

На фиг.6 приведены зависимости отношения динамических членов к статическим от глубины для разных растворов угла при вершине проникающего тела. Как видно из фиг. 6, для тонких тел (кривая 1), где β-0,2, инерционные слагаемые составляют 0,1 часть от статических членов, следовательно, квазистатический подход решения задачи проникания для тонких тел оправдывается. Для тел с конической частью β > 0,6 необходимо учитывать динамические члены. На фиг. 6 приведена также зависимость отношения динамических и статических слагаемых от анизотропии среды.

Приведенные расчеты для больших β с использованием гипотезы плоских сечений не являются точными и могут лишь качественно указать тенденцию изменения ускорений для тупых инденторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ванцян А.А. Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1983, т. 36, N 6, с.23-30.
2. Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград. М.: Изд.МГУ, 1988.
3. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Влияние анизотропных свойств металлических слоистых образцов на проникание. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, N 6, с.28-34.
4. Багдоев А.Г., Ванцян А.А., Григорян М.С. Исследование особенности напряжений в анизотропной пластической среде при проникании конуса. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1989, т. 42, N 4, с.52-57.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Backman M.E., Goldsmit W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. International Journal of Engineering Science. 1978, vol. 16, N 1, p. 2-99.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
4.09.1992