ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.

Հ.Ե. Գասպարյան, Ա.Ա. Խաչատրյան
Միաչափ ալիքների տարածումը անվերջ միկրոպոլար միջավայրում մագնիսական դաշտի հաշվառմամբ

Ուսումնասիրվում է մագնիսամիկրոպոլար ալիքների տարածումը, նրանց արագությունների կախվածությունը հաճախականությունից և արտաքին մագնիսական դաշտից

A E Gasparian, A A Khachatrian
Propagation one-dimensional wave in the infinitiv micropolar continuum
with the magnetic field

Исследуется процесс распространения магнитомикрополярных волн, поведение их скоростей в зависимости от частоты и напряженности внешнего магнитного поля

Уравнения, описывающие волновой процесс в магнитомикрополярной идеально-проводящей среде при наличии внешнего постоянного магнитного поля, имеют вид [1]

$$\left(c_1^2+c_3^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{U}-\left(c_2^2+c_3^2\right)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{U}+c_3^2\operatorname{rot}\overline{\varphi}+\frac{1}{\rho}\overline{F}^{(e)}=\frac{\partial^2\overline{U}}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\left(c_4^2+c_5^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\varphi}-c_4^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{\varphi}+\omega_0^2\operatorname{rot}\overline{U}-2\omega_0^2\overline{\varphi}=\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2} \tag{2}$$

где

$$c_1^2=\frac{1}{\rho}(\lambda+2\mu),\ c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\ c_3^2=\frac{\chi}{\rho},\ c_4^2=\frac{\gamma}{J\rho},\ c_5^2=\frac{\alpha+\beta}{J\rho}$$

$$\omega_0^2=\frac{\chi}{J\rho}=\frac{c_3^2}{J},\ \overline{F}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\overline{U}\times\overline{H}_0\right)\right]\times\overline{H}_0 \tag{3}$$

Здесь $\overline{U}$ вектор смещения; $\overline{\varphi}$ вектор микрополярного вращения, $\overline{F}^{(e)}$ объемная сила электромагнитного происхождения (пондеромоторная сила), λ и μ коэффициенты Ляме; ρ-плотность материала; χ, α, β и

γ дополнительные упругие коэффициенты изотропной микрополярной упругости; J динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении), $\overline{H}_0$ вектор напряженности внешнего магнитного поля

Исследования простейшего типа волн сразу же выясняют существенные черты распространения магнитомикрополярных волн, их характер, скорость распространения, дисперсию и затухание. Характер распространения волн легче всего проследить на примере монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси Ox_1

Предполагая, что в уравнениях (1) и (2) функции $\overline{U}$ и $\overline{\varphi}$ зависят только от $x_1 \equiv x$ и t, получим систему уравнений для компонентов вектора смещения и вектора микрополярного вращения

$$\left(c_1^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}F_1^{(e)}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \left(c_2^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-c_3^2\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}+\frac{1}{\rho}F_2^{(e)}=\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\left(c_2^2+c_3^2\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+c_3^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\frac{1}{\rho}F_3^{(e)}=\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}-c_3^2\frac{\partial u_3}{\partial x}-2\omega_0^2\varphi_2=\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}+c_3^2\frac{\partial u_2}{\partial x}-2\omega_0^2\varphi_3=\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}, \quad \left(c_4^2+c_5^2\right)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}-2\omega_0^2\varphi_1=\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$$

здесь $F_1^{(e)}$, $F_2^{(e)}$ и $F_3^{(e)}$ определяются из последнего соотношения (3) в виде

$$F_1^{(e)}=\left(H_{20}^2+H_{30}^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-H_{10}H_{20}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-H_{10}H_{30}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$$

$$F_2^{(e)}=H_{10}^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-H_{10}H_{20}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad F_3^{(e)}=H_{10}^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}-H_{10}H_{30}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad (5)$$

В зависимости от направления напряженности внешнего магнитного поля возможны следующих два варианта, когда система уравнений (4) упрощается

а) $H_{10}=0, \quad H_{20}\neq 0, \quad H_{30}\neq 0$

Тогда

$$F_1^{(e)}=\left(H_{20}^2+H_{30}^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad F_2^{(e)}=F_3^{(e)}=0 \quad (6)$$

б) $H_{10}\neq 0, \quad H_{20}=H_{30}=0$

Тогда $F_1^{(e)}=0, \quad F_2^{(e)}=H_{10}^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2}, \quad F_3^{(e)}=H_{10}^2\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$ (7)

Отметим, что в случае а) в системе (4) от второго по пятое уравнения не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и это исследовано в работах [2,3], поэтому здесь их рассматривать не будем.

Что же касается первого уравнения, то оно в силу (6) приводится к виду

$$\left(c_1^2 + c_2^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho}\left(H_{20}^2 + H_{30}^2\right) \qquad (1.1)$$

Решения уравнения (1.1) ищем в виде

$$u_1(x,t) = A\exp\left[ik(x - vt)\right] \qquad (1.2)$$

где $k = 2\pi / l$, l длина волны, получим следующую фазовую скорость для распространяющейся волны:

$$v_1^2 = c_1^2 + c_2^2 + v_A^2 \qquad (1.3)$$

которая совпадает с фазовой скоростью продольной магнитоупругой волны при $\chi = 0$ $\left(c_2^2 = 0\right)$. Эти волны подобны классическим волнам без вращения и распространяются без дисперсии.

Последнее уравнение системы (4) описывает процесс распространения поля продольного микровращения [2]. В нем отсутствует напряженность магнитного поля. Скорость этих волн (v_2) зависит от волнового числа k

$$v_2^2 = c_3^2 + c_4^2 + 2\omega_0^2 / k^2 \qquad (1.4)$$

следовательно, распространяющиеся волны обладают дисперсией. Здесь,введя угловую частоту $\omega_1 = kv_2$, фазовую скорость v_2 (1.4) можно представить в следующем виде:

$$v_2^2 = \left(c_3^2 + c_4^2\right)\frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2} \qquad (1.5)$$

В случае б), подставляя (1.2) в первое уравнение системы (4), получим волны продольного смещения [2] с фазовой скоростью

$$v_3^2 = c_1^2 + c_2^2 \qquad (1.6)$$

распространяющиеся без дисперсии.

Учитывая (7) для определения функций $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$, и $\varphi_3(x,t)$ из системы (4) будем иметь

$$\left(c_2^2 + c_3^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - c_3^2\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \left(c_2^2 + c_3^2 + v_A^2\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c_3^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - c_3^2\frac{\partial u_3}{\partial x} - 2\omega_0^2\varphi_2 = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \quad c_4^2\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + c_3^2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\omega_0^2\varphi_3 = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \qquad (1.7)$$

$$v_A^2 = \frac{1}{4\pi\rho}H_{10}^2$$

Монохроматические волны, распространяющиеся в положительном направлении оси Ox_1, имеют следующий вид

$$(u_2, u_1, \varphi_2, \varphi_1) = (u_{20}, u_{10}, \varphi_{20}, \varphi_{10}) \exp[ik(x - vt)] \qquad (1.8)$$

где u_{20}, u_{10}, φ_{20} и φ_{10} постоянные

Подставляя (1.8) в (1.7), получим следующее дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости распространения этих волн

$$Av^4 - Bv^2 + C = 0 \qquad (1.9)$$

где $\quad A = 1 - 2\omega_0^2/\omega^2, \quad C = c_4^2\left(c_2^2 + c_1^2 + v_A^2\right)$

$$B = c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_1^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right)$$

Дисперсионое уравнение (1.9) при произвольном значении ω имеет два корня:

$$v_3^2 = \frac{\omega^2}{2(\omega^2 - 2\omega_0^2)}\left[c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_1^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right) + \sqrt{D}\right] \qquad (1.10)$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{2(\omega^2 - 2\omega_0^2)}\left[c_4^2 + \left(c_2^2 + v_A^2\right)\left(1 - 2\omega_0^2/\omega^2\right) + c_1^2\left(1 - \omega_0^2/\omega^2\right) - \sqrt{D}\right] \qquad (1.11)$$

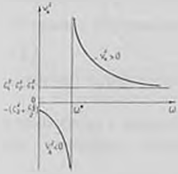
где дискриминант D всегда положителен и имеет следующий вид:

$$D = \left[c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 - v_A^2 + 2\omega_0^2\left(c_2^2 + v_A^2 + c_1^2/2\right)/\omega^2\right]^2 + 4c_1^2c_4^2\omega_0^2/\omega^2 \qquad (1.12)$$

Таким образом, в бесконечной магнитомикрополярной, как и в микрополярной средах, существуют монохроматические волны, которые распространяются с четырьмя различными скоростями (v_1, v_2, v_3, v_4)

2 Как видно из (1.4) и (1.6), скорости v_1 и v_2 не зависят от напряженности внешнего магнитного поля и они рассмотрены в работе [2]. В этом пункте будем исследовать поведение скоростей волн v_3 и v_4 в зависимости от величины напряженности внешнего магнитного поля и частоты ω при условии

$$\frac{1}{4\pi\rho}H_{10}^2 = v_A^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2}\left[c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 + \omega_0^2\left(2c_2^2 + c_1^2\right)/\omega^2\right] \qquad (2.1)$$



Фиг 1

Очевидно, что условие (2.1) имеет смысл при $\omega > \omega^* = \sqrt{2}\omega_0$. Это означает, что $\omega = \omega^*$ является критической частотой для распространения альфвеновских волн. Схематической график зависимости v_3^2 от ω приведен на фиг 1.

Таким образом, если напряженность внешнего постоянного магнитного поля удовлетворяет условию (2.1), при $\omega > \omega^*$ в маг шпомикрополярной среде альфвеновская волна распространяется со скоростью $v_A^2 = H_{10}^2 / 4\pi\rho$, причем $v_A^2(\omega \to \infty) = c_4^2 - c_3^2 - c_1^2$

Из (1.12) с учетом (2.1) получим

$$D = 4c_1^2 c_4^2 \omega_0^2 / \omega^2 \qquad (2.2)$$

С учетом (2.1) и (2.2) для v_1^2 и v_4^2 из (1.10) и (1.11) будем иметь

$$v_1^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2}\left(c_4^2 + c_1 c_4 \omega_0^2 / \omega^2\right) \qquad (2.3)$$

$$v_4^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - 2\omega_0^2}\left(c_4^2 - c_1 c_4 \omega_0^2 / \omega^2\right) \qquad (2.4)$$

Фиг 2

Схематический график зависимости v_1^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг 2

Здесь очевидно, что в промежутке $0 < \omega < \omega^*$ $v_1^2 < 0$; в промежутке $0 \le \omega \le \omega^* \sqrt{c_1 / 2c_4} < \omega^*$ $v_4^2 > 0$, а в промежутке $\omega^* \sqrt{c_1 / 2c_4} < \omega < \omega^*$ $v_4^2 < 0$

Поскольку условие (2.1) имеет смысл при $\omega > \omega^*$, следует, что скорости v_1 и v_4 будут существовать только при $\omega > \omega^*$.

Таким образом, при условии (2.1) в микрополярной среде могут распространяться волны поперечного смещения v_1 и волны поперечного микровращения v_4 при $\omega > \omega^*$. При $\omega \to \infty$ скорости этих волн стремятся к одной и той же скорости c_4.

3. Рассмотрим поведение скоростей волн v_1 и v_4 в зависимости от частоты ω с учетом напряженности внешнего постоянного магнитного поля.

Если в (1.10) и (1.11) подставим $H_0 = 0 \left(v_A^2 = 0\right)$, согласованное решение для v_1 и v_4 (то есть $v_1 > v_4$) будет возможно при условии [2]

$$c_4^2 \ge c_3^2 + c_1^2 \qquad (3.1)$$

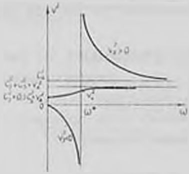
Прит нарушении условия (3.1) микрополярные волны не существуют

Ниже будем рассматривать случаи, при которых в зависимости от величины напряженности внешнего постоянного магнитного поля возможны согласованные решения для v_1 и v_4.

1) При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \qquad (3.2)$$

анализ решений (1.11) показывает, что $\left(v_4^2\right)_\omega > 0$. Качественный вид зависимости для v_1^2 и v_4^2 от частоты ω приведен на фиг 3.



Фиг 3

Здесь при отсутствии магнитного поля $\left(v_A^2 = 0\right)$, приведенные результаты совпадают с результатами, полученными в работе [2].

2)При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 \qquad (3.3)$$

из (1.11) имеем $\left(v_4^2\right)_\omega > 0$. Схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от ω аналогичен фиг 3, но с той разницей, что скорости распространения волн v_1 и v_4^2 при $\omega \to \infty$ стремятся к одному и тому же пределу $\left(c_2^2 + c_1^2 + v_4^2\right)$.

3)При условии

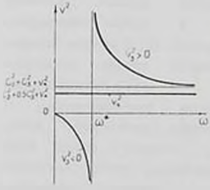
$$c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 < H_{01}^2 / 4\pi\rho < c_4^2 - c_2^2 - c_1^2 / 2 \qquad (3.4)$$

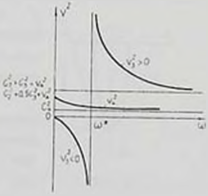
схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от частоты ω тоже аналогичен фиг 3, поэтому здесь не приводится.

4)При условии

$$H_{01}^2 / 4\pi\rho = c_4^2 - c_2^2 - c_1^2/2 \qquad (3.5)$$

из (1.11) имеем $\left(v_4^2\right)_\omega = 0$, то есть волна распространяется с постоянной скоростью v_4 и схематический график зависимостей v_1^2 и v_4^2 от ω приведен на фиг 4.





Фиг.4

Фиг.5

5)При условии

$$H_{01}^2/4\pi\rho > c_4^2 - c_2^2 - c_5^2/2 \qquad (3.6)$$

из (1.11) следует, что $\left(v_4^2\right)_{\omega} < 0$. Это означает, что имеем качественно новый схематический график для v_4^2 в зависимости от частоты ω (фиг.5).

Таким образом, анализ решений (1.10) и (1.11) показывает, что учет внешнего постоянного магнитного поля при распространении магнитомикрополярных волн в идеально проводящих средах в зависимости от величины напряженности магнитного поля, приводит не только к количественным, но и к качественно новым результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaliski S. and Nowacki W. Wave-type Equations of Thermo-Magneto Mikroelasticity. Bull. Acad. Polon. ser. sci. Techn., 13(1970), 155[277].
2. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. Разрушение. Т.2. М.: Мир, 1975. с.646-751.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
20.04.1993