ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Азатян Л.Д.

Լ.Դ.Ազատյան

Մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ փոխազդող կոմպոզիցիոն նյութից կազմված կլոր սալի նախագծումը

Աշխատանքում դիտարկված է մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի հետ փոխազդեցությունը առաձգական շերտավոր կլոր սալի հետ։ Լուծված է այդ սալի օպտիմալ պրոյեկտման (նախագծման) խնդիրը. այն է՝ գտնված է ռադիալ և շրջանային ուղղություններով ամրավորված էլեմենտար շերտերի այնպիսի բաշխում սալի շերտերում, որի դեպքում սալի կոշտությունը լինում է մաքսիմալ։ Մագնիսական գազադինամիկայի գծայնացված հավասարումները լուծվում են փոփոխականների անջատման մեթոդով և գտնվում է ճշգրիտ լուծումը։ Սակայն թվային հաշվարկների համար օգտագործված են մոտավոր բանաձևեր մագնիսական դաշտի և գազի ճնշումը սալի վրա հաշվելու համար։ Բերված են թվային հաշվարկների արդյունքները։

L.D.Azatian

Design of round plate from composition material, interacted with magnetogasodynamic shock wave

В работе рассмотрено взаимодействие круглой упругой слоистой пластинки с магнитогазодинамической ударной волной. Решена задача оптимального проектирования этой пластинки, а именно найдено такое распределение армирующих элементов в окружном и радиальном направлениях круглой пластинки, которое обеспечивает ее максимальную жесткость. Линеаризированные уравнения магнитной газодинамики решены методом разделения переменных и найдено точное решение задачи. Но для получения числовых данных использованы приближенные формулы для определения магнитного поля и давления газа на пластинку. Приведены результаты численных расчетов.

Рассматривается задача определения оптимальной структуры круглой пластинки из композиционного материала, закрепленной в жесткой безграничной стенке, при ее взаимодействии с магнитогазодинамической ударной волной. Пусть пластинка радиуса R отнесена к цилиндрической системе координат (r,Θ,z) так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью (r,Θ). Начало координат принимаем в центре пластинки, ось Oz направлена противоположно движению волны.

Предполагается, что пластинка состоит из $2n$ слоев, поочередно армированных в радиальном и окружном направлениях. При этом, слои с нечетной нумерацией $(1,3,\ldots,2n-1)$ состоят из k_1 элементарных слоев, армированных в радиальном направлении, а слои с четной нумерацией $(2,4,\ldots,2n)$ из k_2 таких же слоев, армированных в окружном направлении. Следовательно, толщины слоев пластинки с нечетной нумерацией будут $\delta_0 k_1$, а с четной нумерацией $\delta_0 k_2$, где δ_0 толщина элементарного слоя.

Таким образом, пластинку общей толщины $2h$ можно представить как собранную из n одинаковых слоев толщины $\delta = \delta_0 k$, где $k = k_1 + k_2$, армированных волокнами в радиальном и окружном направлениях. Величина $\xi = k_1 / k$ определяет относительную толщину радиально армированных слоев пластинки в пакете [1].

Пусть магнитогазодинамическая ударная волна движется со скоростью v_0 и в момент $t = 0$ сталкивается с поверхностью пластинки. Пластинка, другая сторона которой соприкасается с вакуумом, находится в кольцевом магнитном поле $\bar{B}$. Плазма, в которой распространяется ударная волна, предполагается невязкой, нетеплопроводной, имеющей бесконечную электропроводность $(\sigma = \infty)$. Очевидно, что вектор магнитной индукции $\bar{B}$ начального невозмущенного состояния должен удовлетворять уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{rot} \bar{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

из которых следует, что азимутальное начальное магнитное поле является функцией от координаты r. Обозначим через $\bar{B}_0(0, B_\Theta, 0)$ среднее значение вектора магнитной индукции $\bar{B}$.

Будем приписывать индексы 0 и 1 давлению P, плотности ρ, скорости частиц газа $\bar{v}$, магнитному полю $\bar{B}$, скорости звука c впереди и за фронтом падающей волны. Течение за падающей волной определяется из соотношений для прямого скачка уплотнения [2]. Значения параметров за падающим скачком приведены в работе [3].

Параметры газа за отраженной ударой волной представляем в виде [3]

$$
\begin{aligned}
&P_2 = \bar{P}_2 + P, \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2 + \rho, \quad \bar{B}_2 = B_2 + b \\
&\bar{v}_2 = v(v_r, v_z), \quad c_2 = \bar{c}_2 + c
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\bar{P}_2, \bar{\rho}_2, B_2, \bar{c}_2$ давление, плотность, магнитная индукция и скорость звука за отраженной ударной волной в случае ее взаимодействия с безграничной жесткой стенкой. Эти параметры приведены в работе [3].

После подстановки (1) в основную систему уравнений магнитной газодинамики [4] и линеаризации, получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_\Theta), \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{B_2}{4\pi\rho_2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r b_\Theta), \\
&\frac{\partial b_\Theta}{\partial t} = -B_2\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right), \\
&\frac{\partial P}{\partial t} + \rho_2 (c_2)^2 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к совместному решению системы (2), уравнения движения круглой пластинки [5]

$$
D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}D_{22}\frac{\partial w}{\partial r} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z = 0 \tag{3}
$$

и уравнений Максвелла для электромагнитного поля внутри непроводящей пластинки (в вакууме)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot} \vec{h}^{(i)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}^{(i)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{e}(i) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(i)}}{\partial t}, \\
&\operatorname{div} \vec{h}^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{e}^{(i)} = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Пользуясь известными выражениями для жесткостей пластинки, составленной из ортотропных слоев [6], для рассматриваемого случая получаются следующие значения жесткостей [1]:

$$
\begin{aligned}
&C_{11} = \left[(B_r - B_\Theta)\xi + B_\Theta\right]h, \\
&C_{22} = \left[(B_\Theta - B_r)\xi + B_r\right]h, \\
&D_{11} = \frac{1}{12}h^3\left[(B_r - B_\Theta)\xi + B_\Theta\right]
\end{aligned}
$$

$$D_{22} = \frac{1}{12} h^3 \left[\left(B_\theta - B_r \right) \xi + B_r \right]$$

Здесь B_r и B_θ упругие характеристики армированного пластика в направлении армирования и перпендикулярно к нему, w прогиб, m масса пластинки, приходящаяся на единицу площади срединной плоскости, Z нагрузка, которая имеет вид [4]

$$Z = P_x + P + T_{zz} - T_{zz}^{(0)} \tag{5}$$

Здесь P избыточное давление газа, T_{zz} и $T_{zz}^{(0)}$ компоненты максвелловского тензора напряжений в газе и в вакууме соответственно, $\vec{h}^{(0)}$, $\vec{e}^{(0)}$ векторы возмущений магнитного и электрического полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$; c скорость света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек).

К системам дифференциальных уравнений (2), (3) и (4) необходимо присоединить условия непроницаемости стенки, условия непрерывности касательных составляющих электрического поля на поверхности пластинки и условия затухания всех видов возмущений на бесконечности

$$v_z\big|_{z=h} = \begin{cases} -\dfrac{\partial w}{\partial t} & \text{при } r < R \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases} \tag{6}$$

$$e_r = e_r^{(0)} \qquad \text{при } z = h \tag{7}$$

$$q\Big|_{\substack{z \to \infty \\ r \to \infty}} \to 0 \tag{8}$$

где q любая из возмущенных величин.

К этим условиям надо присоединить нулевые начальные условия

$$q\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{9}$$

В настоящей работе рассматривается круглая пластинка, жестко заделанная по кромкам в безграничную жесткую стенку

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R \tag{10}$$

В качестве приближенного выражения для функции w принимается

$$w = f(t)\omega(r) = f(t)\left[1 - \alpha\left(\frac{r}{R}\right)^{n_r+1} + \beta\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] \tag{11}$$

где

$$n_r = \sqrt{C_{22} / C_{11}}, \quad \alpha = \frac{4}{3 - n_r}, \quad \beta = \frac{1 + n_r}{3 - n_r}$$

Введем функции φ и b_θ такие, что

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad h_\theta = \frac{b_\theta}{r}$$

Тогда из первого и второго уравнений системы (2) можно получить

$$P = -\rho_2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{B_2}{4\pi}\frac{b_\theta}{r} \qquad (12)$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (2) имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho_2 (c_2)^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\rho_2 (c_2)^2}{rB_2}\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

Исключая b_θ из (12) и (13), получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\rho_2}{1+\lambda_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \qquad (14)$$

Здесь и в дальнейшем штрихи опускаем. $\lambda_0^2 = B_2^2 / 4\pi\rho_2 c_2^2$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = -\frac{B_2}{c_2^2\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{B_2}{\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \qquad (15)$$

После интегрирования по t, из (14) имеем

$$P(t,r,z) = -\frac{\rho_2}{1+\lambda_0^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho_2 c_2^2 \lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial r}dt + g(r,z) \qquad (16)$$

Так как в момент $t = 0$ соприкосновения ударной волны с пластинкой возмущения отсутствуют, то есть при $t = 0$ $P = \varphi = \partial\varphi / \partial t = 0$, то в (16) можно положить $g(r,z) = 0$. Аналогичными рассуждениями из (15) можно получить

$$b_\theta(r,t,z) = -\frac{B_2}{c_2^2\left(1+\lambda_0^2\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{B_2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{r}\int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial r}dt \qquad (17)$$

Формулами (16) и (17) устанавливается связь между функциями P, φ, и b_θ и φ. То есть, определив функцию φ, по формулам (16) и (17) можно определить P и b_θ. Перейдем к определению функции φ. Четвертое уравнение системы (2) с учетом (16) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{A}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2 + \lambda^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (18)$$

где

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 c_2^2, \qquad A = 1/\left(1+\lambda_0^2\right).$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа [7] к уравнению (18) и граничным условиям (6), (8), а также учитывая условие (9), будем иметь

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial r^2}+\frac{A}{r}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z^2}=\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}\bar{\varphi}, \qquad (19)$$

$$v_{z=0}=-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\Big|_{z=0}=\begin{cases}-s\bar{f}(s)\omega(r) & при \quad r<R,\\ 0 & при \quad r>R\end{cases} \qquad (20)$$

$$\bar{\varphi}\Big|_{\substack{z\to\infty\\ r\to\infty}}\to 0 \qquad (21)$$

Здесь

$$\bar{\varphi}=\int_0^{\infty}\varphi e^{-st}dt,\quad \bar{f}_s=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt \qquad (22)$$

Решение уравнения (19) будем искать методом Фурье. Положим

$$\bar{\varphi}(s,r,z)=X_{(r)}Y_{(z,s)} \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (19), получаем

$$\frac{X''(r)}{X(r)}+\frac{A}{r}\frac{X'(r)}{X(r)}+\frac{Y''(z,s)}{Y(z,s)}-\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}=0, \qquad (24)$$

отсюда

$$X''(r)+\frac{A}{2}X'(r)+n^2X(r)=0 \qquad (25)$$

$$Y''_{(z,s)}-\left(n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}\right)Y_{(z,s)}=0 \qquad (26)$$

Интегрируя (26) и учитывая условие на бесконечности (21), получаем

$$Y_{(z,s)}=C_1(n,s)e^{-z\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}} \qquad (27)$$

Решением уравнения (25), с учетом (21) и ограниченности решения в точке $r=0$, будет

$$X_{(r)}=C_2r^{\nu}J_{\nu}(nr) \qquad (28)$$

Здесь J_ν функция Бесселя порядка ν, где $\nu=\lambda_0^2/2\left(1+\lambda_0^2\right)$ не есть целое число

Общим видом функции $\bar{\varphi}$ является

$$\bar{\varphi}=\int_0^{\infty}r^{\nu}C(n,s)J_{\nu}(n,r)e^{-z\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}dn \qquad (29)$$

Для определения $C(n,s)$ используем граничное условие (20), которое запишем в виде интегрального разложения Фурье Бесселя [8]

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = -r^{\nu}\int_0^{\infty} nJ_{\nu}(nr)\int_0^{R} s\overline{f}(s)\omega(\rho)J_{\nu}(n\rho)\rho^{1-\nu}\,d\rho dn \tag{30}$$

с другой стороны, согласно (29)

$$\left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\right|_{z=h} = -r^{\nu}\int_0^{\infty} J_{\nu(nr)}C(n,s)\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}\; e^{-h\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\,dn \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует

$$C_{(n,s)} = \frac{ns\overline{f}(s)}{\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}e^{h\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\int_0^{R}\rho^{1-\nu}\omega(\rho)J_{\nu}(n\rho)d\rho \tag{32}$$

Таким образом, для $\overline{\varphi}$ получаем

$$\overline{\varphi}=\int_0^{\infty} r^{\nu}J_{\nu}(nr)n\frac{s\overline{f}(s)}{\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}e^{-(z-h)\sqrt{n^2+\frac{s^2}{c_2^2+\lambda^2}}}\int_0^{R}\rho^{(1-\nu)}\omega(\rho)J_{\nu}(n\rho)d\rho dn \tag{33}$$

Используя теорему о свертках [7], получим

$$\varphi=\sqrt{c_2^2+\lambda^2}\int_0^{\infty} r^{\nu}nJ_{\nu}(nr)\overline{\omega}(n)\int_0^{t}\frac{\partial f}{\partial t}(t-\tau)J_0\left[n\sqrt{c_2^2+\lambda^2}\sqrt{\tau^2-\frac{(z-h)^2}{c_2^2+\lambda_2}}\right]d\tau dn \tag{34}$$

где

$$\overline{\omega}(n)=\int_0^{R}\rho^{1-\nu}J_{\nu}(n\rho)\omega(\rho)d\rho$$

Вычисляя производные функции φ по t, r, подставляя в формулы (16) и (17), получим выражения для возмущенного давления P и компоненты возмущения магнитного поля b_{θ}. Эти выражения ввиду их громоздкости не приводятся в работе. Компонента T_{zz} максвелловского тензора напряжений в газе после линеаризации определяется по формуле

$$T_{zz} = -\frac{B_z}{4\pi}b_{\theta}$$

Для определения компоненты $T_{zz}^{(e)}$ максвелловского тензора напряжений в пластинке (в вакууме), необходимо найти $b_{\theta}^{(e)}$, которое согласно уравнениям Максвелла для вакуума (4), определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 b_\Theta^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial b_\Theta^{(i)}}{\partial r}+\frac{\partial^2 b_\Theta^{(i)}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 b_\Theta^{(i)}}{\partial t^2} \tag{35}$$

Получим условие для $b_\Theta^{(i)}$ на поверхности пластинки. Для этого используем граничное условие (7)

$$e_r = e_r^{(i)} \qquad \text{при} \qquad z = h$$

Для идеально проводящего газа из закона Ома следует

$$\bar{e} = -\frac{1}{c}\left(\bar{v}+\bar{B}_z\right)=\frac{1}{c}\left(B_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{i} \quad - B_z\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{k}\right) \tag{36}$$

Отсюда

$$e_r = e_r^{(i)} = \frac{1}{c}B_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \text{при} \qquad z = h$$

С учетом условия (11) легко найти

$$e_r^{(i)}\Big|_{z=h} = \begin{cases} -\dfrac{1}{c}B_z\dfrac{\partial w}{\partial t} & \text{при} \quad r < R \\ 0 & \text{при} \quad r > R \end{cases} \tag{37}$$

Из первого уравнения системы (4) следует

$$\frac{1}{c}\frac{\partial e_r^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\partial b_\Theta^{(i)}}{\partial z} \tag{38}$$

Из (37) и (38) получим следующее граничное условие для функции $b_\Theta^{(i)}$:

$$\left.\frac{\partial b_\Theta^{(i)}}{\partial z}\right|_{z=h} = \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}B_z\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R \end{cases} \tag{39}$$

Таким образом, мы должны решить уравнение (35) при нулевых начальных данных

$$b_\Theta^{(i)} = \frac{\partial b_\Theta^{(i)}}{\partial t} = 0 \qquad \text{при } t = 0$$

граничном условии (39) и условии затухания возмущения на бесконечности

$$b_\Theta^{(i)}\Big|_{\substack{r\to\infty \\ z\to-\infty}} \to 0$$

Принцип решения этого уравнения тот же, что и выше (метод Фурье). Поэтому, не приводя выкладок, запишем окончательное решение в виде

$$b_\theta^{(i)} = \frac{B_z}{c}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t-\tau)\int_0^{\infty} nJ_0(nr)\overline{\omega}(n)J_0\left[nc\sqrt{\tau^2 - \frac{(z-h)^2}{c^2}}\right]dnd\tau \qquad (40)$$

где

$$\overline{\omega}(n) = \int_0^R \rho\omega(\rho)J_0(n\rho)d\rho .$$

$J_0(nr)$ функция Бесселя нулевого порядка. $f(t)$ и $\omega(r)$ — функции, определяемые формулой (11). С учетом (40) можно определить $T_{zz}^{(i)}$

Понятно, что точное решение задачи представляет собой большие трудности. Поэтому для получения числовых данных будем пользоваться упрощенными формулами для определения нагрузки Z, которые позволяют свести задачу к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка. В настоящей работе получены конкретные числовые результаты для случая, когда для определения избыточного давления, компоненты максвелловского тензора напряжений в газе использованы приближенные формулы, полученные на основании применения гипотезы плоского отражения

$$P = -\frac{c_2\rho_2}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad T_{zz} = -\frac{c_2\rho_2\lambda_0^2}{\sqrt{1+\lambda_0^2}}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$T_{zz}^{(i)} = \frac{B_z^2}{4\lambda c}\frac{\partial w}{\partial t} \qquad (41)$$

Согласно (5) и (41) рассматриваемая задача сводится к решению следующего дифференциального уравнения.

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}D_{22}\frac{\partial w}{\partial r} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$
$$+c_2\rho_2\left(\sqrt{1+\lambda_0^2} + \frac{c_2}{c}\lambda_0^2\right)\frac{\partial w}{\partial t} = P_2 \qquad (42)$$

Подставляя прогиб пластинки в виде (11) и применяя метод Бубнова-Галеркина к уравнению (42), для определения стрелы прогиба получим уравнение

$$A_n\frac{d^2 f}{dt^2} + B_n\frac{df}{dt} + C_n f = F_n \qquad (43)$$

где

$$A_n = \frac{mR^2}{2}\left[1 - \frac{4\alpha}{n_r+3} + \frac{2\beta}{3} + \frac{\alpha^2}{n_r+2} + \frac{\beta^2}{5} - \frac{4\alpha\beta}{n_r+7}\right],$$

$$B_n = \frac{\rho_2 c_2 R^2}{2}\left[1 - \frac{4\alpha}{n_r+3} + \frac{2\beta}{3} + \frac{\alpha^2}{n_r+2} + \frac{\beta^2}{5} - \frac{4\alpha\beta}{n_r+7}\right]\left(\sqrt{1+\lambda_0^2} + \frac{c_2}{c}\lambda_0^2\right),$$

$$C_n = \frac{1}{R^2}\left[4\beta\left(1 - \frac{2\alpha}{n_r+3} + \frac{\beta}{3}\right)(9D_{11} - D_{22}) - \alpha(n_r+1)(nr^2 D_{11} - D_{22})\right]\times$$
$$\times\left[1 - \alpha\frac{n_r-1}{2n_r} + \beta\frac{n_r-1}{n_r+3}\right]$$

$$F_n = \frac{P_1 R^2}{2}\left(1 - \frac{2\alpha}{n_r+3} + \frac{\beta}{3}\right)$$

Решение уравнения (43) запишется в виде

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n}\frac{e^{\gamma t}\left(\gamma\sin\sqrt{D}t - \sqrt{D}\cos\sqrt{D}t\right) + \sqrt{D}}{\sqrt{D}\left[\left(\sqrt{D}\right)^2 + \gamma^2\right]} \qquad \text{при } D > 0,$$

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n\gamma^2}\left[e^{\gamma t}(\gamma t - 1) + 1\right] \qquad \text{при } D = 0,$$

$$f(t) = \frac{F_n}{A_n}\frac{e^{\gamma t}\left(\sqrt{-D}\,\mathrm{ch}\sqrt{-D}t - \gamma\,\mathrm{sh}\sqrt{-D}t\right) - \sqrt{-D}}{\sqrt{-D}\left[\left(\sqrt{-D}\right)^2 - \gamma^2\right]} \qquad \text{при } D < 0,$$

Здесь $D = C_n / A_n - B_n^2 / 4A_n^2$, $\gamma = -B_n / 2A_n$

Ставится задача нахождения оптимальной пластинки заданного веса из условия

$$\min_{\xi}\max_{t,r} w(t,r,\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \quad t \ge 0$$

В качестве численного примера рассматривается пластинка, составленная из монослоев композиционного материала со следующими значениями коэффициентов упругости:

$$B_{\theta} = 0.025B_r, \quad B_{r\theta} = 0.0066B,$$

В таблице приведены оптимальные значения параметра ξ и соответствующие значения безразмерного прогиба $\bar{f} = f / 2h$ в центре пластинки для различных значений параметра $\bar{a}^2 = B_0^2 / 4\pi\rho_0 c_0^2$.

характеризующего начальное магнитное поле Расчеты проведены для значения $\lambda_{*} = 2h / R = 0.05$.

$\bar{a}$	0	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\bar{J}$	0.3291	0.3287	0.3271	0.3114	0.1982	0.0765
ξ	0.72	0.72	0.72	0.72	0.75	0.77

Как следует из таблицы, магнитное поле ослабляет воздействие ударной волны на пластинку, что может быть использовано в практических целях Этот же эффект был получен в работе [3].

Данная работа выполнена по заказу фирмы "Анушик" Автор благодарит Гнуни В.Ц за участие в обсуждении работы и ценную консультацию.

ЛИТЕРАТУРА

1.Белубекян Э.В., Гнуни В.Ц. К вопросу проектирования гибкой круглой пластинки из композиционного материала Инж.пробл строительной механики. Ереван, 1985

2.Калихман Л.Е. Элементы магнитной газодинамики. М.:Атомиздат, 1964.

3.Азатян Л.Д. Оптимальное проектирование пластинки полосы, взаимодействующей с магнитогазодинамической ударной волной Изв.НАН РА, Механика, 1995, т.48, N4, с 33-42

4.Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.

5.Лехницкий С.Г Теория упругости анизотропного тела М Наука, 1977

6.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек М Наука, 1974

7 Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965.
8 Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд. ИЛ, 1995

Институт механики НАН Армении Поступила в редакцию 2.03.1995