ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 4, 1996 Механика

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН

**Багдасарян Г.Е., Микилян М.А.**

Գ.Ե. Բաղդասարյան, Մ.Ա. Միկիլյան

**Հաղորդիչ ֆեռոմագնիսական սալի մագնիսաառաձգական տատանումների մաթեմատիկական մոդելավորումը**

Ելնելով առաձգական կայունության տեսության և մագնիսապես փափուկ ֆեռոմագնիսական մարմնի մագնիսաառաձգականության տեսության հիմնական դրույթներից, ստացված են ստացիոնար մագնիսական դաշտում հաղորդիչ ֆեռոմագնիսական մարմնի մագնիսաառաձգական գրգռված վիճակը նկարագրող հավասարումները և եզրային պայմանները: Օգտվելով Կիրխոֆի վարկածներից և ասիմպտոտիկ մեթոդից, բարակ սալերի դեպքում ձևակերպված խնդիրը բերված է երկչափի: Նախկինում համանման ուսումնասիրություններ կատարվել ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող անհաղորդիչ ֆեռոմագնիսական սալերի մագնիսաառաձգական կայունության վերաբերյալ:

G.E.Bagdasarian, M.A.Mikikian

**Mathematical modeling of magnetoelastic vibrations of a conducting ferromagnetic plates**

Исходя из основных положений теории упругой устойчивости [1] и теории магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [2,3], введены уравнения и соответствующие граничные условия, описывающие возмущенное магнитоупругое состояние проводящих ферромагнитных тел в стационарном магнитном поле. Принимая гипотезу Кирхгоффа и применяя, предложенный в работах [4,5], асимптотический метод, сформулированная трехмерная задача сведена к двумерной в случае тонких пластин. Предложенный здесь способ сведения трехмерных задач к двумерным был использован в работах [5,6] при исследовании магнитоупругих колебаний проводящих неферромагнитных пластин и позволил решать конкретные задачи для пластин конечных размеров. Имеются также некоторые результаты, относящиеся к вопросу магнитоупругой устойчивости непроводящих ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле [7,8].

*1. Постановка задачи магнитоупругой устойчивости проводящего ферромагнитного тела.* Пусть изотропное электропроводящее тело (отнесенное к декартовой прямоугольной системе координат $X_1, X_2, X_3$) изготовлено из упругого магнитомягкого ферромагнитного материала и находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $H_0$, электромагнитные свойства среды, окружающей тело, эквивалентны свойствам вакуума

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в теле устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения $\vec{u}_0$, тензором упругих напряжений $\hat{\sigma}_0$ и векторами $\bar{B}$, $\bar{M}$, $\bar{H}$ магнитной индукции, намагниченности и напряженности невозмущенного магнитного поля.

Интенсивность указанных сил магнитного происхождения, в силу стационарности невозмущенного состояния, определяется следующими формулами [2,3]

$$\bar{X} = \mu_0 \left( \bar{M} \bar{\nabla} \right) \bar{H} \qquad \text{(объемные силы)}$$

$$\bar{P}_0 = \left[ \hat{T}^{(e)} - \hat{T} \right] \bar{N} \qquad \text{(поверхностные силы)} \qquad (1.1)$$

где $\mu_0$ магнитная постоянная $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / A^2\right)$, $\nabla$ оператор Гамильтона, $\bar{N}$ единичный вектор внешней нормали к невозмущенной поверхности пластинки, которую, как и в обычной теории упругой устойчивости [1], отождествляется с поверхностью Г начального недеформированного тела, $\hat{T}$ тензор напряжений Максвелла

$$T_{ik} = H_i B_k - \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 \delta_{ik}$$

$$T_{ik}^{(e)} = H_i^{(e)} B_k^{(e)} - \frac{1}{2} \mu_0 \left[ \vec{H}^{(e)} \right]^2 \delta_{ik} \qquad (1.2)$$

индекс "е" здесь и в дальнейшем обозначает принадлежность к внешней области (пространство вне пластинки).

Векторы $\bar{B}$ и $\bar{H}$ в вакууме связаны соотношением $\bar{B}^{(e)} = \mu_0 \bar{H}^{(e)}$, а в магнитомягком ферромагнитном материале с линейной характеристикой соотношением

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 (\bar{H} + \chi \bar{H}) = \mu_0 \mu_r \bar{H} \qquad (1.3)$$

и удовлетворяет (в квазистатическом приближении) уравнениям Максвелла, которые с учетом (1.3) имеют вид

$$\text{rot } \bar{H} = 0, \qquad \text{div } \bar{H} = 0$$

$$\text{rot } \bar{H}^{(e)} = 0, \qquad \text{div } \bar{H}^{(e)} = 0 \qquad (1.4)$$

В (1.3) $\chi$ — магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ — относительная магнитная проницаемость материала пластинки.

Следовательно, напряженность невозмущенного магнитного поля $\vec{H}$ (складываемая из напряженности заданного внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}^0$, создаваемого намагничиванием тела $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0, \vec{H}^{(e)} = \vec{H}_0 + \vec{H}^{0(e)}$) является решением уравнения (1.4) и удовлетворяет следующим известным условиям сопряжения на поверхности Г недеформированной пластинки:

$$\left[\vec{B} - \vec{B}^{(e)}\right]\vec{N} = 0, \quad \left[\vec{H} - \vec{H}^{(e)}\right] \times \vec{N} = 0 \qquad (1.5)$$

и следующие условия на бесконечности:

$$\vec{B}^{(e)} \to \mu_0 \vec{H}_0 \quad \text{или} \quad \vec{H}^{0(e)} \to 0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty \qquad (1.6)$$

Для полного описания невозмущенного состояния остается привести уравнения и соответствующие поверхностные условия относительно компонент $\sigma_{ik}^0$ тензора упругих напряжений невозмущенного состояния. Определение $\sigma_{ik}^0$, согласно (1.1), сводится к решению следующей задачи классической теории упругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}^0}{\partial x_k} + X_i = 0$$
$$\hat{\sigma}^0 \vec{N} = \vec{P}_0 \qquad (1.7)$$

Таким образом, задача магнитоупругости невозмущенного состояния сводится к поэтапному решению следующих двух задач: 1) определение характеристик невозмущенного магнитного поля на основе (1.3)-(1.6); 2) определение напряжений $\sigma_{ik}^0$ невозмущенного состояния на основе (1.7) с использованием (1.1), (1.2) и решения первой задачи.

Отметим (как это видно из (1.5)-(1.7) и сделанного предположения относительно нормали $\vec{N}$), что при решении указанных выше задач (при определении магнитоупругих характеристик невозмущенного состояния) не учитывается влияние деформации невозмущенного состояния и, как следствие этого, определение характеристик невозмущенного магнитного поля сводится к задаче определения магнитного поля недеформированной пластинки. Отметим также, что появление в невозмущенном состоянии магнитного давления

$\bar{P}^0$ обусловлено разрывом компонент тензора напряжений Максвелла на поверхности пластинки. Указанный разрыв является следствием того, что магнитная проницаемость материала пластинки $\mu_r$ отлична от единицы ($\mu_r >> 1$) и поэтому нормальная компонента напряженности магнитного поля и тангенциальные компоненты вектора магнитной индукции на поверхности Г претерпевают разрыв.

Сообщим упругому проводящему ферромагнитному телу некоторое упругое возмущение $\vec{u}$. В результате каждая характеристика невозмущенного состояния получит соответствующее возмущение $\left(\hat{\sigma}+\hat{\sigma},\ \ P_0+\vec{P},\ \ \vec{H}+\vec{h},\ldots\right)$ и магнитоупругая система перейдет в состояние возмущенного движения. Характеристики возмущенного движения должны удовлетворять нелинейным уравнениям теории магнитоупругости проводящего магнитомягкого ферромагнитного тела и условиям сопряжения на его деформированной поверхности [2,3]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и поверхностные условия аналогично работам [1,3,9] линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения и граничные условия относительно возмущений соответствующих магнитоупругих величин невозмущенного состояния (влиянием токов смещения на характеристики упругих колебаний пренебрежено).

уравнения во внутренней области (в области, занимаемой телом)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ik}+\sigma^0_{im}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right)+f_k=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{ik}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ik}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right),\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.8}$$

$$\bar{f}=(\mathrm{rot}\ \bar{h})\times\mu_0\bar{H}+\mu_0\chi\left[\left(\bar{H}\nabla\right)\bar{h}+\left(\bar{h}\nabla\right)\bar{H}\right]$$

$$\mathrm{rot}\ \bar{h}=\sigma\left[\bar{e}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\times\bar{B}\right] \tag{1.9}$$

$$\mathrm{rot}\ \bar{e}=-\mu_0\mu_r\frac{\partial\bar{h}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\ \bar{h}=0$$

уравнения во внешней области (в области вне тела пластинки)

$$\mathrm{rot}\ \bar{h}^{(e)}=0,\qquad \mathrm{div}\ \bar{h}^{(e)}=0$$

$$\mathrm{rot}\ \bar{e}^{(e)}=-\mu_0\frac{\partial\bar{h}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\ \bar{e}^{(e)}=0 \tag{1.10}$$

граничные условия на поверхности недеформированной пластинки

$$\left(\sigma_{ik}+\sigma_{im}^{0}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right)N_k=\left[t_{ki}^{(e)}-t_{ki}\right]N_k+\left[T_{km}^{(e)}-T_{km}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_k \qquad (1.11)$$

$$\left[\mu_r h_k-h_k^{(e)}\right]N_k=\left[\mu_r H_m-H_m^{(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_i$$

$$\vec{N}\times\left[\vec{e}^{(e)}-\vec{e}\right]=\left[\vec{B}^{(e)}-\vec{B}\right]v^{(n)} \qquad (1.12)$$

$$\varepsilon_{nmk}\left\{\left[h_n-h_n^{(e)}\right]N_m-\left[H_n-H_n^{(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}N_i\right\}=0$$

В (1.8)-(1.12) E – модуль упругости, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\rho$ плотность, $\sigma$ коэффициент электропроводности материала пластинки, $\vec{e}$ – вектор напряженности возмущенного электрического поля, $\varepsilon_{nk}$ – тензор Леви-Чивита, $v^{(n)}$ – величина нормальной скорости частицы, находящейся на поверхности разрыва, $t_{ik}$, $t_{ik}^{(e)}$ возмущения компонент тензора напряжений Максвелла для тела и окружающей среды соответственно

$$t_{ik}=\mu_0\mu_r\left(h_i H_k+h_k H_i\right)-\delta_{ik}\mu_0\vec{H}\vec{h}$$

$$(1.13)$$

$$t_{ik}^{(e)}=\mu_0\left[h_i^{(e)}H_k^{(e)}+h_k^{(e)}H_i^{(e)}-\delta_{ik}\vec{H}^{(e)}\vec{h}^{(e)}\right]$$

К системе уравнений (1.9), (1.10) необходимо присоединить также условия затухания возмущений электромагнитных величин на бесконечности.

*2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки.* Пусть упругая изотропная проводящая ферромагнитная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной системе координат $x_1, x_2, x_3$ расположена так, что ее срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью ($x_1, x_2$). Для сведения трехмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (1.8) к двумерным уравнениям устойчивости тонких пластин принимается гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем следующие известные соотношения.

$$u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1},\qquad u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2},\qquad u_3=w(x_1,x_2,t), \qquad (2.1)$$

где $u(x_1,x_2,t)$, $v(x_1,x_2,t)$ и $w(x_1,x_2,t)$ возмущения перемещений точек срединной плоскости пластинки.

Используя (2.1) из закона Гука для $\sigma_{11}$, $\sigma_{22}$ и $\sigma_{12}$ получаются следующие приближенные выражения:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial v}{\partial x_2}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial v}{\partial x_1}-2x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right]$$

Как и в обычной теории упругой устойчивости тонких пластин, будем считать, что деформации удлинения и сдвига малы по сравнению с соответствующими углами поворота $2\vec{\omega}=\mathrm{rot}\,\vec{u}$ и, в своей очереди их последние величины малы по отношению к единице. Кроме того, всеми величинами, характеризующими влияние поворотов $\omega_3$ вокруг оси $0x_3$, будем пренебрегать. Согласно изложенному, подставляя (2.1) и (2.2) в (1.8) и осредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом (1.7), получим следующие двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки:

$$L_1(u,v)+\frac{1-\nu^2}{2Eh}(\sigma_{11}^{+}-\sigma_{11}^{-})+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}[f_1+G_1(w)]dx_3=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$L_2(u,v)+\frac{1-\nu^2}{2Eh}(\sigma_{22}^{+}-\sigma_{22}^{-})+\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int_{-h}^{h}[f_2+G_2(w)]dx_3=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.3)$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-t_{11}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-2t_{12}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-t_{22}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\left(\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}\right)-$$

$$-h\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_{13}^{+}+\sigma_{13}^{-}\right)-h\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_{23}^{+}+\sigma_{23}^{-}\right)-\int_{-h}^{h}[f_3-G(w)+x_3K]dx_3-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-h}^{h}x_3G_1(w)dx_3-\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-h}^{h}x_3G_2(w)dx_3=0.$$

В уравнениях (2.3) индексами "+" и "-" здесь и в дальнейшем отмечены значения соответствующих величин на поверхностях пластинки $x_3=h$ и $x_3=-h$ соответственно:

$$L_1(u,v)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+n}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$L_2(u,v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad (2.4)$$

$$G = X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad G_i = X_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad k = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \qquad (i,k = 1,2)$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad t_{ik}^0 = \int_{-h}^{h} \sigma_{ik}^0 dx_3$$

$t_{ik}^0$ – усилия, характеризующие невозмущенное состояние пластинки, которые определим, решая задачу (1.7).

Входящие в уравнение (2.3) неизвестные величины $\sigma_{i3}^{\pm}$ $(i=1,2,3)$ определяем, используя поверхностные условия (1.10) при $x_3 = \pm h$. Из этих условий, с учетом (1.7) и (2.1) имеем

$$h_1^{\pm} - h_1^{(e)\pm} = \frac{\chi}{\mu_r} H_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$h_2^{\pm} - h_2^{(e)\pm} = \frac{\chi}{\mu_r} H_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\mu_r h_3^{\pm} - h_3^{(e)\pm} = \chi\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right], \qquad (2.5)$$

$$e_1^{\pm} - e_1^{(e)\pm} = \chi\mu_0 H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t},$$

$$e_2^{\pm} - e_2^{(e)\pm} = -\chi\mu_0 H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t}.$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = \mu_0 H_{03}^{(e)}\left[h_1^{(e)\pm} - h_1^{\pm}\right] - \mu_0\chi H_{01}^{(e)}\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right], \qquad (2.6)$$

$$\sigma_{23}^{\pm} = \mu_0 H_{03}^{(e)}\left[h_2^{(e)\pm} - h_2^{\pm}\right] - \mu_0\chi H_{02}^{(e)}\left[H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right].$$

$$\sigma_{33}^{\pm} = \mu_0 H_{01}^{(e)}\left[h_1^{\pm} - h_1^{(e)\pm}\right] + \mu_0 H_{02}^{(e)}\left[h_2^{\pm} - h_2^{(e)\pm}\right] +$$

$$+\mu_0\chi H_{03}^{(e)}\left[\frac{\chi}{\mu_r} h_3^{\pm} - \left(H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right].$$

Поверхностные условия (2.5) являются следствием непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции возмущенного магнитного поля и тангенциальных компонент возмущенного электромагнитного поля на лицевых поверхностях пластинки $(x_1 = \pm h)$. Аналогичные условия имеют место и на боковой поверхности пластинки. Например, если часть торцевой поверхности является плоской с внешней нормалью, параллельной оси $0x_1$, то на этой части боковой поверхности при $x_1 = \text{const}$ условие непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции, согласно (1.12), (2.1) и (1.5), запишется следующим образом.

$$\mu_r h_1 - h_1^{(e)} = \chi\left[ H_{02}^{(e)}\frac{\partial u}{\partial x_2} - H_{03}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x_1} - x_1 H_{02}^{(e)}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right]. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в систему (2.3), замечаем, что в ней кроме основных неизвестных функций u,v,w входят также значения компонент $H_i$ и $H_i^{(e)}$ невозмущенного магнитного поля (которые определяются из решения задачи (1.4)-(1.6)) и значения возмущений $h_i$ и $h_i^{(e)}$. Определение $h_i$ и $h_i^{(e)}$ сводится к решению уравнений (1.9) и (1.10) с краевыми условиями (2.5) на лицевых поверхностях пластинки и условиями типа (2.7) на боковой поверхности пластинки. К этим условиям необходимо присоединить также условия $h_i^{(e)} \to 0$ на бесконечности.

*3. О приведении трехмерной задачи магнитоупругой устойчивости тонких пластин к двумерной.* Как видно из предыдущего пункта, в двумерные уравнения (2.3) устойчивости пластинки входят величины $H_i, H_i^{(e)}$, $h_i$ и $h_i^{(e)}$, являющиеся решениями трехмерных задач (1.4)-(1.6) и (1.9), (1.10), (2.5), (2.7) соответственно. Указанные задачи, насколько нам известно, нельзя решить в явном виде. Поэтому, в основном, применяются приближенные или численные методы решения подобных задач. В работе [10] численным методом решены задачи определения $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$ в случае сверхпроводящей пластинки-полосы (случай, когда присутствие пластинки наиболее сильно влияет на изменение $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$) в продольном магнитном поле. Численные результаты показывают, что величины $H_i^{(e)}$ и $h_i^{(e)}$ вне некоторого, достаточно узкого пограничного слоя, практически совпадают с величинами $H_i^{(e)*}$ и $h_i^{(e)*}$, являющимися решением тех же задач в случае бесконечной пластинки. Исходя из этого, в дальнейшем будем принимать $H_i = H_i^*$, $H_i^{(e)} = H_i^{(e)*}$, $h_i =$

$h_i^*$ и $h_i^{(e)} = h_i^{(e)*}$. Легко проверить, что величины $H_i^*$, $H_i^{(e)*}$ и $B_i^*$, $B_i^{(e)}$ определяются формулами:

$$\vec{H}^{(e)*} = \vec{H}_0, \quad \vec{B}^{(e)*} = \mu_0 \vec{H}^{(e)*} = \mu_0 \vec{H}_0 = \vec{B}_0$$
$$H_1^* = H_{01}, \quad H_2^* = H_{02}, \quad H_3^* = \frac{1}{\mu_r} H_{03}, \quad \vec{B}^* = \mu_0\mu_r \vec{H}^* \tag{3.1}$$

Решение задачи, определяющей $h_i^*$ и $h_i^{(e)*}$, будем искать в классе гармонических волн, представляя искомые магнитоупругие возмущения в виде

$$u = u_0 \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad u \to (u, v, w),$$
$$Q = q(x_3)\exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad Q \to (h_i^{*(e)}, e_i^{*(e)}, h_i^*, e_i^*) \tag{3.2}$$

где $k_1$ и $k_2$ – волновые числа.

Подставляя (3.2) в уравнения (1.9), (1.10) и удовлетворяя поверхностным условиям (2.5), определяем неизвестные функции $q(x_3)$ (выраженные через $u_0, v_0, \omega_0$) и, следовательно, интересующие нас величины $h_i^*$ и $h_i^{*(e)}$. Выражения для указанных величин, в общем случае, когда заданное магнитное поле имеет произвольное направление, получаются громоздкими и здесь не приводятся. Поэтому ограничиваемся рассмотрением двух наиболее важных случаев задания внешнего магнитного поля: поперечное магнитное поле и продольное магнитное поле.

а) **Поперечное магнитное поле**. В этом случае для электромагнитных возмущений, после выполнения вышеуказанных операций, получаются следующие выражения:

$$h_1 = H_{03}\left\{\frac{\nu\chi \operatorname{ch}\nu x_3}{\mu_r\delta_2}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\mu_0\mu_r\sigma \operatorname{sh}\nu x_3}{k\nu\delta_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1 - \frac{\nu(1+\mu_r kh)}{\delta_2}\operatorname{ch}\nu x_3\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t}\right\}, \tag{3.3}$$

$$h_2 = H_{03}\left\{\frac{\nu\chi \operatorname{ch}\nu x_3}{\mu_r\delta_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\mu_0\mu_r\sigma \operatorname{sh}\nu x_3}{k\nu\delta_1}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1 - \frac{\nu(1+\mu_r kh)}{\delta_2}\operatorname{ch}\nu x_3\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t}\right\},$$

$$h_1 = H_{01}\left\{-\frac{\chi \operatorname{sh}\nu x_3}{\mu_r \delta_2}\Delta w - \frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(1 - \frac{k\mu_r \operatorname{ch}\nu x_3}{\delta_1}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_0\sigma}{\nu^2}\left(x_3 - \frac{1+\mu_r kh}{\delta_2}\operatorname{sh}\nu x_3\right)\frac{\partial \Delta w}{\partial t}\right\},$$

где

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \nu^2 = k_1^2 + k_2^2 + \mu_0\mu_r\sigma i\omega,$$
$$\delta_1 = \nu \operatorname{sh}\nu h + k\mu_r \operatorname{ch}\nu h, \quad \delta_2 = \nu \operatorname{ch}\nu h + k\mu_r \operatorname{sh}\nu h. \tag{3.4}$$

В дальнейшем будем принимать, что края пластинки неподвижны в своей плоскости. В этом случае, на основе (3.1) легко заметить, что задача (1.7) имеет следующее решение $\sigma^n_{33} = \chi^2 B_0^2 / 2\mu_0\mu_r^2$, а остальные компоненты тензора равны нулю. Учитывая сказанное из (2.3) в силу (3.1) и (3.3) замечаем, что задачи продольных и поперечных магнитоупругих колебаний пластинки для рассматриваемого случая разделяются и описываются следующими уравнениями:

уравнения продольных колебаний

$$L_1(u,v) + \frac{(1-\mu^2)B_0^2\sigma}{E\nu^2\mu_r}\left[1 + \frac{\mu_r(\nu^2 - k^2) + \chi\nu^2}{k\delta_1}\frac{\operatorname{sh}\nu h}{\nu h}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right) =$$
$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$
$$L_2(u,v) + \frac{(1-\mu^2)B_0^2\sigma}{E\nu^2\mu_r}\left[1 + \frac{\mu_r(\nu^2 - k^2) + \chi\nu^2}{k\delta_1}\frac{\operatorname{sh}\nu h}{\nu h}\right]\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) =$$
$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

уравнение поперечных колебаний

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi h B_0^2}{\mu_0\mu_r}\left(1 + \frac{\chi \operatorname{sh}\nu h}{\delta_2 h} - \frac{\chi\delta_3}{\mu_r\delta_2 h}\right)\Delta w -$$
$$- \frac{2h\sigma B_0^2}{\nu^2\mu_r}\left[\frac{\chi\delta_3}{\delta_2 h}\left(2 + \mu_r(1+kh)\right) + \frac{k^2h^2}{3} + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2}\frac{1+\mu_r kh}{\delta_2 h}\delta_3\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial t} = 0 \tag{3.6}$$

где

$$\delta_3 = \nu h \operatorname{ch}\nu h - \operatorname{sh}\nu h.$$

Из (3.6) легко получить уравнение поперечных магнитоупругих колебаний пластинки в случае диэлектрического ферромагнитного материала ( $\sigma = 0$), полученного в [7,8] и в случае проводящего неферромагнитного материала ( $\chi = 0$), полученного в [9,11].

Интересным является также случай идеально проводящего ферромагнитного материала ( $\sigma \to \infty$ , $\chi \neq 0$ ). Уравнение поперечных колебаний для этого случая представляется в виде

$$\left(D+\frac{2h^3}{3}\frac{B_0^2}{\mu_0\mu_r^2}\right)\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2hB_0^2}{\mu_0}(1+kh)\Delta w=0, \qquad (3.7)$$

которое при $\chi = 0$ (идеально проводящий неферромагнитный материал) совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки в поперечном магнитном поле, полученным в [12,13] на основе предположения бесконечности пластинки.

Уравнение (3.7) показывает, что в отличие от диэлектрической ферромагнитной пластинки (такая пластинка теряет статическую устойчивость в поперечном магнитном поле [7]), идеально проводящая ферромагнитная пластинка вобщее говоря, является устойчивым под действием указанного магнитного поля. Отметим также, что уравнение (3.7) не получается из уравнения (3.6) путем предельного перехода ( $\sigma \to \infty$ ). Оно получено обычным путем на основе гипотезы недеформируемых нормалей и модели идеального проводника. Причиной несовпадения уравнения (3.7) с уравнением, полученным из (3.6) при $\sigma \to \infty$ является то, что при выводе уравнения (3.6) использованы условия непрерывности тангенциальных составляющих магнитного поля на поверхности пластинки. Указанные условия непрерывности в случае модели идеального проводника нарушаются вследствие появления индуцированного поверхностного тока.

б) **Продольное магнитное поле**. В этом случае аналогичным образом, как выше, для возмущений магнитного поля получаются выражения:

$$h_1=\delta\operatorname{sh}\nu x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1}+B_{02}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)-\frac{\nu^2-k^2}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\operatorname{ch}\nu x_3}{\operatorname{ch}\nu h}-1\right)\frac{B_{02}u-B_{01}v}{\mu_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\mu_0}\left(\frac{\operatorname{sh}\nu x_3}{\operatorname{sh}\nu h}-\frac{x_3}{h}\right)\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_2}-B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right] \qquad (3.8)$$

$$h_2=\delta\operatorname{sh}\nu x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1}+B_{02}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)+\frac{\nu^2-k^2}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\operatorname{ch}\nu x_3}{\operatorname{ch}\nu h}-1\right)\frac{B_{02}u-B_{01}v}{\mu_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\mu_0}\left(\frac{\operatorname{sh}\nu x_3}{\operatorname{sh}\nu h}-\frac{x_3}{h}\right)\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_2}-B_{02}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$h_3=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\nu^2-k^2}{\nu^2}+\frac{k^2}{\nu^2}\delta\operatorname{ch}\nu x_3\right)\left(B_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1}+B_{02}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)$$

где

$$\delta = \frac{\mu_1 k^2 - \nu^2}{k\delta_1}$$

Используя условия неподвижности края пластинки в своей плоскости, легко заметить, что задача (1.7) для рассматриваемого случая имеет нулевое решение: $\sigma^0_{ik} = 0$. Учитывая это и выражения (3.8) из (2.3), как и в случае поперечного магнитного поля, получается, что уравнения продольных и поперечных магнитоупругих колебаний отделяются и имеют вид.

уравнения продольных колебаний

$$L_1(u,\mathrm{v}) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2}\frac{\delta_1(1-\mu^2)}{E\nu h \mathrm{ch}\nu h}\left[\chi\frac{\partial}{\partial x_2}\left(B_{01}\frac{\partial}{\partial x_1} + B_{02}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + B_{02}\Delta\right]\left(\frac{B_{02}u - B_{01}\mathrm{v}}{\mu_0}\right) =$$

$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.9}$$

$$L_2(u,\mathrm{v}) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu^2}\frac{\delta_1(1-\mu^2)}{E\nu h \mathrm{ch}\nu h}\left[\chi\frac{\partial}{\partial x_1}\left(B_{01}\frac{\partial}{\partial x_1} + B_{02}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + B_{01}\Delta\right]\left(\frac{B_{01}\mathrm{v} - B_{02}u}{\mu_0}\right) =$$

$$= \frac{\rho(1-\mu^2)}{E}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2},$$

уравнение поперечных колебаний

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\chi h}{\mu_0 \nu^2}\left[1 + \delta\left(\mathrm{ch}\nu h - \frac{2\mathrm{sh}\nu h}{\nu h}\right)\right]L(\Delta w) - \frac{2\sigma h\mu}{\nu^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\delta\frac{\mathrm{sh}\nu h}{\nu h}\right)L(w) + \left(\frac{\delta_1}{\nu^2 \mathrm{sh}\nu h} - \frac{h^2}{3}\right)\Delta\left[B_0^2\Delta w - L(w)\right]\right\} = 0 \tag{3.10}$$

где дифференциальный оператор L определяется выражением

$$L = B_{01}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2B_{01}B_{02}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + B_{02}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \text{а} \quad B_0^2 = B_{01}^2 + B_{02}^2.$$

Из (3.9) и (3.10) легко получить уравнение магнитоупругих колебаний пластинки в случае проводящего неферромагнитного материала ( $\chi = 0$ ), полученные в [9,11] и следующее уравнение, описывающее поперечные колебания диэлектрической ( $\sigma = 0$ ) ферромагнитной пластинки в продольном магнитном поле

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi h}{\mu_0}\left[1 + \frac{\chi(kh\mathrm{ch}kh - 2\mathrm{sh}kh)}{kh(\mathrm{sh}kh + \mu_r \mathrm{ch}kh)}\right]L(w) = 0 \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) показывает, что рассматриваемая пластинка (помня о том, что края пластинки неподвижны в своей плоскости) может терять статическую устойчивость в продольном магнитном поле.

Интересным является также случай идеально проводящего ферромагнитного материала ( $\sigma \to \infty$, $\chi \neq 0$ ). Уравнение поперечных колебаний для этого случая получается в виде

$$D_* \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2h}{\mu_0}\left(1 + \frac{1}{kh}\right) L(w) = 0 \tag{3.12}$$

$$D_* = D + \left( {2h^3 B_0^2} \big/ {3\mu_0} \right)$$

которое при $\chi = 0$ идеально проводящий неферромагнитный материал совпадает с уравнением магнитоупругих колебаний рассматриваемой пластинки в продольном магнитном поле, полученном в [12,13]. Здесь также уравнение (3.12) не получается из (3.10) путем предельного перехода ( $\sigma \to \infty$ ).

Таким образом, получены основные уравнения возмущенного состояния проводящей ферромагнитной пластинки как в поперечном (уравнения (3.5)-(3.7)), так и в продольном (уравнения (3.9)-(3.12)) магнитных полях, в которые входят неизвестные волновые числа $k_1$ и $k_2$. К этим уравнениям в каждой конкретной задаче необходимо присоединить условия закрепления краев пластинки. Волновые числа $k_1$ и $k_2$ определяем, используя асимптотический метод, развитый в работах [4-6]. В дальнейшем будем рассматривать прямоугольные пластинки, принимая $\left|v^2 h^2\right| << 1$. В случаях диэлектрических или идеально проводящих пластин это условие заменяется более простым условием $k^2 h^2 << 1$. Используя указанное предположение, уравнения поперечных колебаний упрощаются и принимают следующий вид

$$D \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2\chi h}{\mu_0 \mu_r}\left(1 + \frac{\chi}{1 + \mu_r kh}\right) B_0^2 \Delta w -$$

$$- \frac{2h^3}{3}\sigma B_0^2 \left(1 + \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{\chi(1 - kh)}{1 + \mu_r kh}\right) \frac{\partial \Delta w}{\partial t} = 0 \tag{3.13}$$

в случае поперечного магнитного поля и

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \mu_r \sigma h}{k\alpha(1 + kh)} \frac{\partial}{\partial t}\right]\left(D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \frac{2\chi h}{\mu_0 \alpha} L(w) - \frac{2\sigma h \mu_r}{k^2 \alpha} L\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\alpha = \frac{\mu_r + kh}{1 + kh} \tag{3.14}$$

в случае продольного магнитного поля.

Из уравнения (3.13) видно (помимо известного факта [7] о потере ста тической устойчивости ферромагнитной пластинки под действием поперечного магнитного поля), что учет намагниченности материала пластинки ( $\chi \neq 0$ ) может существенно ( $\chi$ раза) усилить демпфирующее действие магнитного поля, если вспомнить, что для обычных ферромагнитных материалов $\chi \div 10^{2} - 10^{4}$

Переходим к вопросу определения волновых чисел $k_1$ и $k_2$. Как показано в работе [6], при определении $k_1$ и $k_2$ можно ограничиться случаем идеально проводящего материала. Т.е. волновые числа, определяемые (указанным асимптотическим методом), на основе уравнения и соответствующих граничных условий идеально проводящей пластинки, можно (с точностью теории тонких пластин) использовать в задачах колебания тонких пластин из материала конечной проводимости. Следовательно, асимптотический метод будем применять лишь относительно уравнения (3.7) или (3.12) при обычных условиях закрепления краев пластинки. Для определенности рассмотрим колебание прямоугольной пластинки со сторонами $a_1$ и $a_2$ в продольном магнитном поле $H_0 = (H_{01}, 0, 0)$. Условия на контуре будем пока считать произвольными. Уравнение поперечных колебаний для рассматриваемого случая, согласно (3.12), имеет вид

$$D.\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2h}{\mu_0} B_{01}^2 \left[ \frac{1 + kh}{kh} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] = 0. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) решено асимптотическим методом в работах [4-6] при обычных условиях на контуре пластинки. В результате в зависимости от типа магнитоупругих возмущений и от способа закрепления краев пластинки получаются следующие системы трансцендентных уравнений относительно волновых чисел $k_1$ и $k_2$:

1. Случай шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки:

$$k_1 = \frac{n\pi}{a_1}, \qquad k_2 = \frac{m\pi}{a_2}, \qquad (m, n = 1,2,3...) \tag{3.16}$$

2. Случай защемленной пластинки (в этом случае формы магнитоупругих колебаний пластинки распадаются на четыре группы по типам симметрии):

$$\operatorname{ctg}\frac{k_1 a_1}{2} = -\frac{k_1}{r_1}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{k_2 a_2}{2} = -\frac{k_2}{r_2}, \tag{3.17}$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний и

$$\operatorname{tg}\frac{k_1 a_1}{2}=\frac{k_1}{r_1}, \qquad \operatorname{tg}\frac{k_2 a_2}{2}=\frac{k_2}{r_2} \tag{3.18}$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно $k_1$ и $k_2$ получаются из приведенных, комбинируя соответствующим образом одно из уравнений (3.18) с другим из (3.19).

В системах (3.17), (3.18) введены обозначения

$$r_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 khD.}B_{01}^2$$

$$r_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2 \tag{3.19}$$

3. Случаи других граничных условий. Соответствующим образом, комбинируя приведенные уравнения, можно получить уравнения относительно волновых чисел $k_1$ и $k_2$ для других видов опорного закрепления. Например, если края $x_1=0$ и $x_1=a_1$ жестко защемлены, а края $x_2=0$ и $x_2=a_2$ шарнирно оперты, то в случае симметричных колебаний имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{k_1 a_1}{2}=-\frac{k_1}{r_1}, \qquad k_2=\frac{(2n-1)\pi}{a_2}. \qquad (n=1,2,3...) \tag{3.20}$$

Вернемся к случаю поперечного магнитного поля, опираясь на уравнение (3.7). Принимая вышеизложенный асимптотический метод относительно этого уравнения при различных граничных условиях, легко установить, что частота магнитоупругих колебаний определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{D_*}{2\rho h}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)^2 + \frac{2hB_0^2k^2}{\mu_0 D}(1+kh)\right] \tag{3.21}$$

а волновые числа являются решениями уравнений (3.17)-(3.19), в которых величины $r_n$ необходимо заменить выражениями

$$r_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 D.}B_0^2$$

$$r_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2 + \frac{2h(1+kh)}{\mu_0 D.}B_0^2 \tag{3.22}$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л. Гостехиздат, 1948. 212с.
2. Broun W.F. Magnetoelastic Interactions. New York. Springer Verlag. 1966. 155p.

3. Pao y.h. and Yeh C.S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids. Int. J. Eng. Sci., v 11, 1973, p. 415-436.
4. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. Инж. сб. 1960, т.31, с. 3-14.
5. Багдасарян Г.Е. Асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин. Мат. методы и физ.-мех. Поля, 1986, N24, с. 72-75.
6. Аконян П.З., Багдасарян Г.Е. Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Изв. АН Арм ССР Механика, 1987, т.49, N3, с. 11-18.
7. Мун, Пао И-Синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластинки в поперечном магнитном поле. Тр. Американского общества инженеров и механиков. Сер. Е. Прикладная Механика, 1969, N1, с. 98-108.
8. Багдасарян Г.Е., Даноян Э.А. Математическое моделирование колебаний двухслойных магнитострикционных пластин. Изв. РАН Механика твердого тела, 1992, N3, с. 87-94.
9. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука 1977. 272 с.
10. Багдасарян Г.Е., Пилипосян Г.Т. Исследование магнитоупругой устойчивости сверхпроводящей пластинки на основе численного решения внешней задачи Неймана. Изв. НАН Армении, Механика, 1995, т. 48, N2, с.13-26.
11. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 121 с.
12. Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assumig the principle of plans sections. Proc. Vibr. 1962, V 3, N4, p 225-234.
13. Багдасарян Г.Е. Уравнение магнитоупругих колебаний идеально проводящих пластин. Прикл. Механика 1983, т. 19, N12, с 87-91.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 11.03.1996