ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, N 3, 1996 Механика

ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

Макарян В. С.

Վ.Ս.Մակարյան
Երկու խնդիր շրջանային սեկտորի համար

Դիտարկված են շրջանային սեկտորի համար առաջին եզրային խնդիր և նման խնդիր, երբ սեկտորը ունի սիմետրիկ ճաք: Առաջին խնդիրը բերված է լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվա-կան հավասարումների համակարգի: Երկրորդ խնդիրը նախ բերված է զույգ հավասարումների, ապա քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի

V.S.Makanan
Two problems for circular sector

Рассмотрены первая основная задача для кругового сектора с произвольным углом раствора и аналогичная задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии. Первая задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Вторая задача сначала сведена к парным уравнениям, затем к решению квазивполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

1. Первая основная задача теории упругости для кругового сектора

Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, φ, как известно [1 5], приводится к отысканию одной функции $\Phi(r,\varphi)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению.

Преобразованием $r = \mathrm{Re}^{-t}$ задача сводится к отысканию одной функции $F(t,\varphi) = \mathrm{Re}^{-t}\,\Phi(r,\varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F = 0 \tag{1.1}$$

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для кругового сектора конечного радиуса с произвольным углом раствора. При симметричном нагружении задачу решаем для половины сектора. При этом, граничные условия в координатах $(t,\varphi), t = \ln\dfrac{R}{r}$ записываются в виде :

условия на круговой части границы

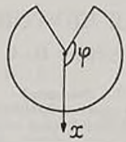
$$\begin{aligned} &\sigma_r(0,\varphi) = f(\varphi), && (0 \le \varphi \le \varphi_1 < \pi) \\ &\tau_{r\varphi}(0,\varphi) = g(\varphi), && (0 \le \varphi \le \varphi_1 < \pi) \end{aligned} \tag{1.2}$$

условия симметрии

$$\tau_{r\varphi}(r,0)=0,\quad v(r,0)=0,\qquad (0<r<\infty) \tag{1.3}$$

и условия на радиальной части контура

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi}(r,\varphi_1)&=g_1(r), \qquad (0<r<\infty)\\ \sigma_{\varphi}(r,\varphi_1)&=f_1(r) \qquad (0<r<\infty)\end{aligned} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Условие статики $\sum F_x=0$ дает

$$R\int_0^{\varphi_1}\left[f(\varphi)\cos\varphi-g(\varphi)\sin\varphi\right]d\varphi=\int_0^{R}\left[f_1(r)\sin\varphi_1-g_1(r)\cos\varphi_1\right]dr \tag{1.5}$$

Функцию $F(r,\varphi)$ для кругового сектора $0\le r<1,-\varphi_1\le\varphi\le\varphi_1$ при наличии одной оси симметрии $(\varphi=0)$ представим в виде суммы тригонометрического ряда и интеграла Фурье

$$F(r,\varphi)=(A_0+rB_0)e^{-r}+\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(r)\cos\alpha_k\varphi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\beta,\varphi)\cos\beta r d\beta \tag{1.6}$$

где

$$\Psi_k(r)=\frac{(-1)^k X_k}{2}\left[\frac{e^{-(\alpha_k-1)r}}{\alpha_k-1}-\frac{e^{-(\alpha_k+1)r}}{\alpha_k+1}\right]-\frac{g_k}{2}\left[e^{-(\alpha_k-1)r}-e^{-(\alpha_k+1)r}\right]$$

$$\Psi_k(0)=\frac{(-1)^k X_k}{\alpha_k^2-1},\qquad \Psi_k'(0)=0,\qquad \alpha_k=\frac{k\pi}{\varphi_1} \tag{1.7}$$

$$\Phi(\beta,\varphi)=\gamma(\beta)Y(\beta)\Phi_1(\beta,\varphi)+\bar{g}_1(\beta)\Phi_1(\beta,\varphi)$$

$$\Phi_1(\beta,\varphi)=\beta\Phi_1(\beta,\varphi)-\Phi_2(\beta,\varphi)$$

причем

$$\Phi(\beta,\varphi_1)=\frac{Y(\beta)}{\beta^2+1}+\frac{\bar{g}_1(\beta)\sin 2\varphi_1}{2\delta(\beta)},\qquad \int^{\varphi_1}\Phi(\beta,\varphi)d\varphi=\frac{2\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^2+1)^2} \tag{1.8}$$

$$\Phi'(\beta,\varphi_1)=-\bar{g}_1(\beta),\qquad \Phi'(\beta,0)=0.$$

$$\delta(\beta)\Phi_1'(\beta,\varphi) = \operatorname{sh}\beta\varphi\cos\varphi\operatorname{ch}\beta\varphi_1\sin\varphi_1 - \operatorname{ch}\beta\varphi\sin\varphi\operatorname{sh}\beta\varphi_1\cos\varphi_1$$

$$\delta(\beta)\Phi_2'(\beta,\varphi) = \operatorname{sh}\beta\varphi\cos\varphi\operatorname{sh}\beta\varphi_1\cos\varphi_1 - \operatorname{ch}\beta\varphi\sin\varphi\operatorname{ch}\beta\varphi_1\sin\varphi_1$$

$$\delta(\beta) = \operatorname{sh}^2\beta\varphi_1 + \sin^2\varphi_1,\ \gamma(\beta) = \frac{\operatorname{ch}2\beta\varphi_1 - \cos 2\varphi_1}{\operatorname{sh}2\beta\varphi_1 + \beta\sin 2\varphi_1},\quad \chi(\beta.t) = \sin\beta t - \beta\cos\beta t$$

$$g_k = \frac{R}{\alpha_k}\int_0^{\varphi_1} g(\varphi)\sin\alpha_k\varphi d\varphi,\quad f_k = \int_0^{\varphi_1} f(\varphi)\cos\alpha_k\varphi d\varphi,\qquad (k = 0.1,2...)$$

$$\tilde{g}_1(\beta) = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty r g_1(r)\sin\beta_k t dt,\quad \bar{f}_1(\beta) = \int_0^\infty r f_1(r)\chi(\beta,t)dt,\quad \tilde{f}_{10} = \int_0^\infty r f_1(r)e^{-t}dt$$

При удовлетворении граничным условиям, заданным на дуге окружности $(t = 0.\ 0 < \varphi < \varphi_1)$. используем ортогональность тригонометрических функций, а для удовлетворения условиям, заданным на линиях $(\varphi = const, 0 < t < \infty)$, кроме обычного интеграла Фурье, используем интегральные преобразования :

$$\varphi(\beta) = \int_0^\infty f(t)\chi_k(\beta.t)dt \qquad k = 1.2$$

$$f(t) = (-1)^k e^{-\gamma t}H_0(\gamma)\int_0^\infty f(x)e^{-\gamma x}dx + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi(\beta)\chi_k(\beta.t)d\beta}{\beta^2 + \gamma^2}; \quad (1.9)$$

$$\chi_1(\beta.t) = \gamma\cos\beta t + \beta\sin\beta t,\quad \chi_2(\beta.t) = \gamma\sin\beta t - \beta\cos\beta t. \quad (1.10)$$

где γ произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда.

При выборе (1.6) (1.8) условия симметрии и граничные условия на касательные напряжения удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям на нормальные напряжения, получаются следующие уравнения для определения $X_k, Y(\beta), A_0$ и B_0

$$X_k + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\alpha_k^2 - 1)\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{\left[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2\right]\left[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2\right]}d\beta = (-1)^k(g_k - Rf_k) -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta^2(\beta^2 + 3\alpha_k^2 + 1)\tilde{g}_1(\beta)}{\left[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2\right]\left[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2\right]}d\beta \qquad (k = 1,2...)$$

$$\mathrm{Y}(\beta) + \frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=1}^\infty \frac{(\beta^2 + 1)\alpha_k X_k}{\left[\beta^2 + (\alpha_k + 1)^2\right]\left[\beta^2 + (\alpha_k - 1)^2\right]} = \frac{2B_0}{\beta^2 + 1} + \frac{1}{\beta}\bar{f}_1(\beta) -$$

$$-\frac{(\beta^2+1)\sin 2\varphi_1}{2\delta(\beta)}\bar{g}_1(\beta)+\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha_k^2(\alpha_k^2+3\beta^2+1)g_k}{\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]} \qquad (0<\beta<\infty)$$

$$(2A_0-B_0)\varphi_1+\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\gamma(\beta)Y(\beta)}{(\beta^2+1)^2}d\beta=Rf_0+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta^2\bar{g}_1(\beta)}{\beta^2+1}d\beta \qquad (1.11)$$

$$A_0-B_0=\int_0^{\infty} rf_1(r)e^{-t}dt-\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k g_k$$

На основе условия статики нетрудно показать, что коэффициент $B_0=0$.

Докажем, что бесконечные системы (1.11) вполне регулярны. Вычислим суммы

$$\rho_1=\frac{4|\alpha_k^2-1|}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\gamma(\beta)d\beta}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}\le$$

$$\le\frac{|\alpha_k^2-1|}{\pi\alpha_k}\ln\left|\frac{\alpha_k+1}{\alpha_k-1}\right|=\frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{3\alpha_k^2}-\frac{2}{3\cdot 5\alpha_k^4}-\frac{2}{5\cdot 7\alpha_k^6}-\dots\right]\to\frac{2}{\pi} \qquad (1.12)$$

$$\rho_2=\frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(\beta^2+1)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}\le$$

$$\le\frac{4(\beta^2+1)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha d\alpha}{\left[\beta^2+(\alpha-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha+1)^2\right]}=\frac{(\beta^2+1)}{\pi\beta}arcctg\frac{\beta^2-1}{2\beta}=$$

$$=\frac{2(\beta^2+1)}{\pi(\beta^2-1)}\left[1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}-\dots\right], \qquad x=\frac{2\beta}{\beta^2-1}$$

Отсюда следует, что при $k\to\infty$

$$\lim_{k\to\infty}\rho_1=\lim_{k\to\infty}\rho_2=\frac{2}{\pi} \qquad (1.13)$$

В общем случае свободные члены стремятся к нулю как $0(k^{-1})$. При отсутствии касательных напряжений порядок убывания к нулю свободных членов увеличивается на единицу.

В частном случае, когда $g_1(r)=g(\varphi)=0$, $f_1(r)=f(\varphi)=P_0=const$, система (1.11) становится однородным и в силу (1.8) имеет только нулевое решение, кроме

$$A_0=\frac{1}{2}RP_0 \qquad (1.14)$$

2. Плоская задача для кругового сектора с трещиной

Рассматривается плоская задача для кругового сектора, имеющего разрез на линии симметрии сектора (фиг.2). На радиальных частях контура приложены гладкие штампы. На контуре сектора касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения заданы в виде произвольных интегрируемых функций.

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_1(0,\varphi)=f_0(\varphi), \qquad v(t,\varphi_1)=a+be^{-t}; \qquad \tau_{r\varphi}|_r=0 \qquad (2.1)$$

$$\sigma_\varphi(t,0)=\sigma(t), \qquad (t_0<t<\infty); \qquad v(t,0)=0 \qquad (0\le t\le t_0)$$

Условия на τ_{kp} удовлетворяются тождественно. Из остальных условий (2.1) получим

$$2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\alpha_k\varphi + D - 2A = \int_0^{\infty}\left[\Phi''(\beta,\varphi)+\Phi(\beta,\varphi)\right]d\beta - Rf_0(\varphi) \qquad (0\le\varphi\le\varphi_1)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta^2+1}{\beta}\int^{\varphi_1}\Phi(\beta,\varphi)d\varphi\chi(\beta,t)d\beta - 4\varphi_1 De^{-t} + a_0\sin\varphi_1 + C_0e^{-t} = a+be^{-t} \qquad (2.2)$$

$$\int_0^{\infty}\beta\Phi(\beta,0)\chi(\beta,t)d\beta + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\Psi_k''(t)-\Psi_k'(t)\right] + 2\Phi_0(t) - 3De^{-t} = r\sigma(t) \qquad (t_0<t<\infty)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta^2+1}{\beta}\int^{0}\Phi(\beta,\varphi)d\varphi\chi(\beta,t)d\beta + C_0e^{-t} = 0 \qquad (0\le t\le t_0)$$

Фиг.2

Из первого и второго соотношений (2.2) имеем

$$4\varphi_1 D = -2\left(a - a_0\sin\varphi_1\right) - b + c_0 \qquad (2.3)$$

$$B(\beta)\cos\varphi_1 + C(\beta)ch\beta\varphi_1 = \frac{a-a_0\sin\varphi_1}{\pi}\left[\frac{1}{\varphi_1} - \lim_{x\to 0}\frac{x\beta}{x^2+\beta^2}\right] \equiv Z(\beta)$$

$$A_k = \frac{2(\alpha_k^2-1)}{\varphi_1}\int_0^{\infty}\frac{\beta\left[\bar{X}(\beta)-(-1)^k Z(\beta)\right]d\beta}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]} - f_{0k}$$

$$D-2A=-\frac{2}{\varphi_1}\int_0^\infty \frac{\beta\left[\tilde{X}(\beta)-Z(\beta)\right]d\beta}{(\beta^2+1)^2}-f_{00}$$

где

$$\tilde{X}(\beta)=-C(\beta)\frac{\mathrm{ch}^2\beta\varphi_1-\cos^2\varphi_1}{\cos\varphi_1}+\frac{Z(\beta)\mathrm{ch}\beta\varphi_1}{\cos\varphi_1}=X(\beta)N_0(\beta)$$

$$C(\beta)=\frac{Z(\beta)\mathrm{ch}\beta\varphi_1-\tilde{X}(\beta)\cos\varphi_1}{\mathrm{ch}^2\beta\varphi_1-\cos^2\varphi_1};\qquad B(\beta)=\frac{\tilde{X}(\beta)\mathrm{ch}\beta\varphi_1-Z(\beta)\cos\varphi_1}{\mathrm{ch}^2\beta\varphi_1-\cos^2\varphi_1}$$

$$f_{0k}=\frac{R}{\varphi_1}\int_0^{\varphi_1} f_0(\varphi)\cos\alpha_k\varphi d\varphi \qquad (k=0,1,2\cdots) \tag{2.4}$$

$$N_0(\beta)=\frac{\mathrm{ch}^2\beta\varphi_1-\cos^2\varphi_1}{\mathrm{sh}\beta\varphi_1\mathrm{ch}\beta\varphi_1+\beta\cos\varphi_1\sin\varphi_1};\quad M_0(\beta)=\frac{\mathrm{sh}\beta\varphi_1\cos\varphi_1+\beta\mathrm{ch}\beta\varphi_1\sin\varphi_1}{\mathrm{ch}^2\beta\varphi_1-\cos^2\varphi_1}$$

$$Z(\beta)=\frac{a-a_0\sin\varphi_1}{\pi}\left[\frac{1}{\beta}-\beta\delta(\beta)\right];\qquad \chi(\beta,t)=\sin\beta t-\beta\cos\beta t$$

Из последних двух соотношений (2.2) получим парные уравнения

$$\int_0^\infty \frac{X(\beta)N_0(\beta)\chi(\beta,t)}{\beta^2+1}d\beta+\frac{c_0}{2}e^{-t}=0 \qquad (0\le t\le t_0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\beta X(\beta)\chi(\beta,t)}{\beta^2+1}d\beta=\int_0^\infty \frac{\beta Z(\beta)M_0(\beta)}{\beta^2+1}\chi(\beta,t)d\beta+2\Phi_0(t)-$$

$$-3De^{-t}+\sum_{k=1}^\infty\left[\Psi_k''(t)-\Psi_k'(t)\right]-r\sigma(t) \qquad (t_0<t<0) \tag{2.5}$$

Перейдём к решению парных уравнений (2.5). Умножим оба уравнения на e^{-t} и проинтегрируем первое из них в пределах $(0,t)$, второе в пределах (t,∞), получим

$$\int_0^\infty [1+N(\beta)]\frac{X(\beta)\sin\beta t}{\beta^2+1}d\beta=\frac{c_0}{2}sht \qquad (0\le t\le t_0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\beta X(\beta)\sin\beta t}{\beta^2+1}d\beta=f_1(t) \qquad (t_0<t<\infty) \tag{2.6}$$

где

$$-N(\beta)=1-N_0(\beta),\quad f_1=\int_t^\infty e^{t-x}f(x)dx \tag{2.7}$$

а через $f(t)$ обозначена правая часть второго уравнения (2.5)

Представим решение (2.6) в виде [6]

$$\frac{\beta X(\beta)}{\beta^2+1}=\beta\int_0^\infty xF_1(x)J_0(\beta x)dx+\sum_{k=0}^\infty Z_k J_{2k+1}(\beta t_0)=$$

$$=-t_0F_1(t_0)J_1(t_0\beta)-\int_{t_0}^\infty xF_1'(x)J_1(\beta x)dx+\sum_{k=0}^\infty Z_k J_{2k+1}(\beta t_0) \qquad (2.8)$$

где

$$F_1(x)=\frac{2}{\pi}\int_x^\infty\frac{f_1(t)dt}{\sqrt{t^2-x^2}}, \qquad G_1(x)=-\frac{c_0}{P}\int_0^x\frac{\operatorname{ch}tdt}{\sqrt{x^2-t^2}}=-\frac{c_0}{2}I_0(x) \qquad (2.9)$$

На основе результатов работы [6], для определения Z_k получим систему

$$\frac{Z_k}{2(2k+1)}+\int_0^\infty\left[\sum_{m=0}^\infty Z_m J_{2m+1}(\beta t_0)+\beta\int_{t_0}^\infty xF_1(x)J_0(x\beta)dx\right]\frac{M(\beta)}{\beta}J_{2k+1}(\beta t_0)d\beta=$$

$$-\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}tG_1(t)P_k\left(1-\frac{2t^2}{t_0^2}\right)dt=\frac{c_0}{\pi}\int_0^{t_0}\frac{\operatorname{sh}t\sin[(2k+1)u_0]}{\sqrt{t_0^2-t^2}}dt \qquad (2.10)$$

Кроме (2.10) для определения свободных членов из (2.8) получается ещё одно уравнение

$$t_0F_1(t_0)=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k Z_k \qquad (2.11)$$

Пользуясь свойствами функции N(β) и асимптотическими формулами бесселевых функций J_n и K_n при больших значениях индекса нетрудно доказать, что в системе (2.10) сумма модулей коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, когда $k\to\infty$. Значит, система (2.10) при $\varphi_1>0$ квазивполне регулярна.

После приведения всех кратных интегралов к одномерным на основе формулы (2.8) соотношения (2.10) и (2.11) приведем к виду:

$$(A-D)t_0K_0(t_0)+Dt_0^2K_1(t_0)+\frac{t_0(a-a_0\sin\varphi_1)}{2}\int_0^\infty\frac{M_0(\beta)J_0(\beta t_0)}{\beta^2+1}d\beta=$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k Z_k-t_0\sum_{k=1}^\infty A_k\left\{K_0[(\alpha_k-1)t_0]-K_0[(\alpha_k+1)t_0]\right\}+\frac{\pi t_0}{2}\sigma_0(t_0) \qquad (2.12)$$

$$\frac{Z_k}{2(2k+1)}=\sum_{m=0}^\infty\frac{R\sigma_m}{\gamma_m+2}P_0(k,\gamma_m+1)-(A-D)P_0(k,1)-DP_1(k,1)-$$

$$-\sum_{m=0}^\infty Z_m J_{mk}-\sum_{m=1}^\infty A_m\left[P_0(k,\alpha_m-1)-P_0(k,\alpha_m+1)\right]+\frac{c_0(-1)^k}{2}I_{2k+1}(\beta t_0)-$$

$$\frac{a-a_0\sin\varphi_1}{\pi}\int_0^\infty N(\beta)J_{2k+1}(\beta t_0)d\beta\int_0^\infty\frac{M_0(y)}{y^2+1}\left[\delta(y-\beta)-J_0(y,\beta,t_0)\right]dy \quad (k=1,2,3\cdots) \quad (2.13)$$

где $I_n(x), K_n(x)$ – функции Бесселя от мнимого аргумента. $J_1(x)$ функция Бесселя от действительного аргумента, $\delta(x)$ функция Дирака. $H_0(x)$ функция Хевисайда

$$P_n(k,q)=\int_0^\infty N(\beta)J_{2k+1}(\beta t_0)K_n(q,\beta)d\beta \qquad (n=0,1) \qquad (2.14)$$

$$J_{mk}=\int_0^\infty \beta^{-1}N(\beta)J_{2m+1}(\beta t_0)J_{2k+1}(\beta t_0)d\beta \qquad (m,k\geq 0)$$

$$J_0(\alpha,\beta,a)=\int_0^a xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)dx; \qquad K_n(\alpha,\beta,a)=\frac{2}{\pi}\int_a^\infty x^{n+1}J_0(\beta x)K_n(\alpha x)dx \qquad (n=0,1)$$

При получении (2.12) и (2.13) было использовано представление

$$\sigma(t)=\sum_{k=1}^\infty \sigma_k e^{-\gamma_k t}, \qquad \gamma_k>-1 \qquad (2.15)$$

где (γ_k) монотонно возрастающая последовательность.

Подставляя выражение функции $X(\beta)$ из (2.8) в (2.3), после ряда элементарных преобразований получим вторую бесконечную систему

$$\frac{\varphi_1 A_k}{2(\alpha_k^2-1)}=\sum_{m=0}^\infty Z_m C(m,k)+\sum_{m=1}^\infty A_m\left[D_0(\alpha_m-1,k)-D_0(\alpha_m+1,k)\right]+$$

$$+(A-D)D_0(1,k)+DD_1(1,k)-\sum_{m=1}^\infty\frac{R\sigma_m}{\gamma_m+2}D_0(\gamma_m+1,k)+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\beta(\beta^2+1)N_0(\beta)d\beta}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}\int_0^\infty\frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2+1}\left[\delta(y-\beta)-J_0(y,\beta,t_0)\right]dy-$$

$$-\frac{\varphi_1}{2(\alpha_k^2-1)}\left[f_{0k}+\frac{2(-1)^k(a-a_0\sin\varphi_1)}{4\alpha_k\varphi_1}\right], \qquad (k=1,2,3\cdots) \qquad (2.16)$$

$$\frac{\varphi_1}{2}(2A-D-f_{00})+\frac{a-a_0\sin\varphi_1}{4}=\sum_{m=0}^\infty Z_m C(m,0)+$$

$$+\sum_{m=1}^\infty A_m\left[D_0(\alpha_m-1,0)-D_0(\alpha_m+1,0)\right]+DD_1(1,0)+$$

$$+(A-D)D_0(1,0)+\int_0^\infty\frac{\beta N_0(\beta)d\beta}{\beta^2+1}\int_0^\infty\frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2+1}\left[\delta(y-\beta)-J_0(y,\beta,t_0)\right]dy-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R\sigma_m}{\gamma_m+2}D_0(\gamma_m+1,0). \qquad (k=0) \qquad (2.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C(m,k)=\int_0^{\infty}\frac{N_0(\beta)(\beta^2+1)J_{2m+1}(\beta t_0)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}d\beta \qquad (2.18)$$

$$D_n(b,k)=\int_0^{\infty}\frac{\beta(\beta^2+1)N_0(\beta)K_n(b,\beta,t_0)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}d\beta \qquad (n=0,1)$$

Интегралы (2.18) сходятся очень медленно, что затрудняет вычислительные работы. Их сходимость существенно улучшается, если пользоваться формулами типа

$$C^{(0)}(m,k)=\int_0^{\infty}\frac{(\beta^2+1)J_{2m+1}(\beta t_0)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}d\beta= \qquad (\alpha_k>1)$$

$$=\frac{(-1)^{m-1}}{4}\frac{\alpha_k+2}{\alpha_k+1}\left\{K_{2m+1}\left[(\alpha_k+1)t_0\right]-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p(2m-p)!}{p!}\left[\frac{2}{(\alpha_k+1)t_0}\right]^{-2p+2m+1}\right\}-$$

$$-\frac{(-1)^{m-1}}{4}\frac{\alpha_k-2}{\alpha_k-1}\left\{K_{2m+1}\left[(\alpha_k-1)t_0\right]-\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p(2m-p)!}{p!}\left[\frac{2}{(\alpha_k-1)t_0}\right]^{-2p+2m+1}\right\}$$

$$D_n^{(0)}(b,k)=\int_0^{\infty}\frac{\beta(\beta^2+1)K_n(b,\beta,t_0)}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}d\beta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{\infty}x^{n-1}K_n(bx)\left\{(\alpha_k+2)K_0\left[(\alpha_k+1)x\right]-(\alpha_k-2)K_0\left[(\alpha_k-1)\right]\right\}dx \qquad (2.19)$$

$$E(y)=\int_0^{\infty}\frac{\beta(\beta^2+1)\left[\delta(y-\beta)-J_0(y,\beta,t_0)\right]}{\left[\beta^2+(\alpha_k-1)^2\right]\left[\beta^2+(\alpha_k+1)^2\right]}d\beta=$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[(\alpha_k+2)K_0(\alpha_k+1,y,t_0)-(\alpha_k-2)K_0(\alpha_k-1,y,t_0)\right].$$

Вычислим теперь контактные напряжения и нормальные перемещения точек берегов трещины. Для этого сначала на основе работы [6], из (2.10) и (2.11) получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\beta X(\beta)\sin\beta t d\beta}{\beta^2+1}=-\frac{2}{t_0^2}H_0(t_0-t)\sqrt{t_0^2-t^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k Z_k U_k\left(\frac{t}{t_0}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)-$$

$$-t\int_{t_0}^{\infty}\frac{F_1'(x)H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx \qquad (0\le t<\infty) \tag{2.20}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{N_0(\beta)X(\beta)\sin\beta t d\beta}{\beta^2+1}=\int_{t_0}^{\infty}\frac{xF_1(x)H_0(x-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z_k}{2k+1}\begin{cases}\sin[(2k+1)u_0] & (t\le t_0)\\ (-1)^k q_0^{2k+1}(t) & (t\ge t_0)\end{cases}+$$

$$+\int_0^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}Z_m J_{2m+1}(\beta t_0)+\beta\int_{t_0}^{\infty}xF_1(x)J_0(x\beta)dx\right]\frac{N(\beta)\sin\beta t}{\beta}d\beta \qquad (0\le t\le\infty)$$

где $U_k(x)$-полином Чебышева второго рода,

$$u_0=\arcsin\frac{t}{t_0}, \qquad q_0(t)=\frac{t_0}{t+\sqrt{t^2-t_0^2}}; \tag{2.21}$$

Затем, пользуясь очевидными соотношениями преобразования Абеля и формулой (2.11), после ряда преобразований из (2.20) получим

$$\frac{Ev(t,0)}{2}=\frac{c_0}{2}e^{-t}+\int_0^{\infty}\frac{X(\beta)N_0(\beta)}{\beta^2+1}\chi(\beta.t)d\beta=\frac{c_0}{2}e^{-t}-F_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{xF_1(x)-tF_1'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx+$$

$$+\int_0^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}Z_m J_{2m+1}(\beta t_0)+\beta\int_{t_0}^{\infty}xF_1(x)J_0(x\beta)dx\right]\frac{N(\beta)}{\beta}\chi(\beta.t)d\beta-$$

$$-\frac{1}{t_0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k Z_k\left[2\sum_{n=1}^{k}q_0^{2k}(t)-\frac{t_0}{2k+1}q_0^{2k+1}(t)\right] \qquad (t_0<t<\infty) \tag{2.22}$$

$$t\sigma_\varphi(t,0)=t\sigma(t)+\int_t^{\infty}\frac{\left[xF_1'(x)\right]'-tF(x)}{\sqrt{x^2-t^2}}dx+\frac{1}{\sqrt{t_0^2-t^2}}* \tag{2.23}$$

$$*\left\{-t_0F_1'(t_0)+\frac{1}{t_0}\sum_{k=1}^{\infty}Z_k(-1)^k\left[(2k+1)U_{2k}\left(\frac{t}{t_0}\right)-1+\frac{2(t_0^2-t^2-t)}{t_0}U_k\left(\frac{t}{t_0}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]\right\}$$

где функция $\sigma(t)$ является аналитическим продолжением граничной функции $\sigma(t)$ на область $(0\le t\le t_0)$.

На основе формулы (2.22) вычислим $v(\infty,0)$. Пользуясь известными свойствами интеграла Фурье, получим

$$\frac{Ev(\infty,0)}{2}=-F_1(t_0)+\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\frac{xF_1(x)-tF_1'(x)}{\sqrt{t^2-x^2}}dx+$$

$$+\frac{2t_0\sin^2\varphi_1}{2\varphi_1+\sin 2\varphi_1}\left\{\frac{\pi Z_0}{4}+(A-D)K_1(t_0)+Dt_0K_2(t_0)+L_{10}+L_{20}\right\} \quad (2.24)$$

$$L_{10}=\frac{\pi}{2t_0}\int_0^\infty\frac{yZ(y)M_0(y)}{y^2+1}\left[\delta(y)-\frac{t_0}{y}J_1(t_0y)\right]dy$$

$$L_{20}=\sum_{k=1}^\infty\left\{A_k\left[\frac{K_1[(\alpha_k-1)t_0]}{\alpha_k-1}+\frac{K_1[(\alpha_k+1)t_0]}{\alpha_k+1}\right]-\frac{R\sigma_kK_1[(\gamma_k+1)t_0]}{(\gamma_k+1)(\gamma_k+2)}\right\}$$

Пользуясь формулами для напряжений, вычислим интегралы

$$\int_0^R\sigma_\varphi(t,\varphi)dr=2A-D+\sum_{k=1}^\infty\frac{2A_k\cos\alpha_k\varphi}{\alpha_k^2-1}+\int_0^\infty\Phi(\beta,\varphi)d\beta$$

$$\int_0^R r\sigma_\varphi(t,\varphi)dr=R(A-D) \quad (2.25)$$

Из первой формулы (2.20) при $\varphi=\varphi_1$ получим условие статики

$$P_1\sin\varphi_1=R\int_0^{\varphi}f_0(\varphi)\cos\varphi d\varphi \quad (2.26)$$

а при $\varphi=0$ получается другое условие статики

$$\int_0^{R_0}\sigma(t)dr+\int_{R_0}^R\sigma(t)dr=\frac{R}{\sin\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}f_0(\varphi)\cos(\varphi_1-\varphi)d\varphi$$

Из второй формулы (2.26) следует

$$R_1P_1=\int_0^{R_0}r\sigma(t)dr+\int_{R_0}^R r\sigma_\varphi(t,0)dr=R(A-D) \quad (2.27)$$

где P_1-сила, действующая на штамп на расстоянии R_1 от точки $t=\infty$, $\sigma(t)$ нагрузка на берегах трещины.

Таким образом, задача свелась к определению коэффициентов A_k и Z_m $(k=1,2,3,\cdots,\ m=1,2,3\cdots)$ из бесконечных систем (2.13) и (2.16), а также постоянных a_0,c_0,A,D из первого и четвертого соотношений в (2.4) и (2.12) Соотношение (2.27) является связью между коэффициентами a,b, главным вектором P_1 и главным моментом R_1P_1, действующим на штамп. Контактные напряжения и перемещения точек берегов трещины будем определять по формулам (2.23) и (2.24), в частности, максимальное расхождение точек берегов трещины $2v(\infty,0)$ определяется формулой (2.25).

Пользуясь асимптотическими формулами, для бесселевых функций нетрудно установить следующие асимптотические поведения коэффициентов бесконечных систем (2.13) и (2.16)

1)при $m = const,\ k \to \infty$

$$J_{m,k} = 0\left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!}\right], \quad P_0(k,m) = 0\left[\frac{t_0^{2k}}{(2k)!}\right] \tag{2.28}$$

$$C(m,k) = 0\left[\frac{1}{\alpha_k^4}\right] \quad D_0(m,k) = 0\left[e^{-\alpha_k t_0}\right]$$

2)при $k = const,\ m \to \infty$

$$J_{m,k} = 0\left[\frac{t_0^{2m}}{(2m)!}\right], P_0(k,m) = 0\left[e^{-\alpha_k t_0}\right]0,\ C(m,k) = 0\left[\frac{(\alpha_k t_0)^n}{(2m)!}\right], D_0(m,k) = 0\left[e^{-\alpha_k t_0}\right]$$

На этой основе нетрудно доказать, что сумма модулей всех коэффициентов в системах (2.13) и (2.16) при возрастании номера строки стремится к нулю.

Следовательно, совокупность бесконечных систем (2.13) и (2.16) в общем случае квазивполне регулярна.

Во всех приведенных формулах удалось выразить кратные интегралы через быстро сходящиеся ряды или одномерные интегралы, кроме тех членов, которые содержат функцию $Z(\beta)$, или же постоянную $(a - a_0 \sin\varphi_1)$. Для того, чтобы избавиться от этого неудобства, можно поступить следующим образом: свободные члены в формулах для компонент перемещения представим в виде

$$Eu_0(t,\varphi) = 2(1-\nu)(A + Dt)e^{-t} + (1+\nu)De^{-t} - a_0\cos\varphi + b_0\sin\varphi$$

$$Ev_0(t,\varphi) = -4\varphi De^{-t} + a_0\sin\varphi + b_0\cos\varphi + c_0 e^{-t} \tag{2.29}$$

и будем считать, что $b_0 \neq 0$, то есть смещаем обычное условие симметрии на отрезке $(\varphi = 0,\ 0 \le t \le t_0 < \infty)$. При $t_0 = \infty$ будем считать $b_0 = 0$, то есть приходим к обычным условиям симметрии.

При этом из (2.29) имеем

$$Eu_0(\infty,0) = -a_0, \quad Ev(\infty,0) = b_0 \qquad (\varphi = 0)$$

$$Eu_0(\infty,\varphi_1) = -a_0\cos\varphi_1 + b_0\sin\varphi_1, \qquad (\varphi = \varphi_1) \tag{2.30}$$

$$Ev_0(t,\varphi_1) = a_0\sin\varphi_1 + b_0\cos\varphi_1 + (c_0 - 4\varphi_1 D_0)e^{-t}, \qquad \varphi = \varphi_1, t \to \infty$$

Условие симметрии представим уже в виде

$$\tau_{t\varphi}(t,0) = 0, \quad Ev(t,0) = -b_0 \quad (0 \le t \le t_0 < \infty) \cdot \tag{2.31}$$

а при удовлетворении граничному условию $Ev(t,\varphi_1) = a + be^{-t}$ будем считать, что $a = a_0 \sin\varphi_1 + b_0 \cos\varphi_1$, после чего из этого же условия вместо первых двух соотношений в (2.3) получаются

$$B(\beta)\cos\varphi_1 + C(\beta)ch\beta\varphi_1 = 0, \quad 4\varphi_1 D = c_0 - b \tag{2.32}$$

Все остальные формулы и выражения, а также бесконечные системы остаются в силе, если в них положить $Z(\beta) \equiv 0$, или же $a = a_0 \sin\varphi_1$, а в правой части бесконечной системы (2.13) добавить член

$$\frac{b_0}{E}\left\{(-1)^k I_{2k+1}(\beta t_0)\frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}\frac{\left(1-e^{-t}\right)\sin\left[(2k+1)\arcsin\frac{t}{t_0}\right]}{\sqrt{t_0^2-t^2}}dt\right\} \tag{2.33.}$$

или

$$\frac{b_0}{E}\left\{(-1)^k I_{2k+1}(\beta t_0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-e^{-t_0 \sin x}\right)\sin\left[(2k+1)x\right]dx\right\} \tag{2.34}$$

где последний интеграл при $k \to \infty$ стремится к нулю, как $O\left(k^{-1}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А.А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв.Ан АрмССР, сер.физ мат наук, 1962, т. 15, No 1.
2. *Алексанян Р.К., Казанчян Э.П., Саркисян В.Г.* Плоская контактная задача теории упругости составного круга. Межвуз сб., Механика, вып. 3, Ереван 1984
3. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости.-Л.: Наука, 1968.
4. *Макарян В.С., Саркисян В.Г.* Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. Изв. Ан АрмССР, Механика, 1990, т. 43, No 2.
5. *Чобанян К.С.* Напряжения в упругих составных телах. Ереван:Изд.АН АрмССР, 1987
6. *Баблоян А.А., Макарян В.С.* Решение парных интегральных уравнений, содержащих комбинации тригонометрических функций. Изв НАН Армении, Механика, 1996, т. 49, N 2.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды М.: Наука, 1981.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995