

ВОЛНЫ ЛЯВА, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Мухсихачоян А.Р.

Ա.Ռ. Մուխսիխաչոյան

Պարբերաբար անհարթ եզրի երկայնքով տարածվող Լյավի ալիքների մասին

Գլխավորվում է սահմանային ալիքների տարածումը կիսապարամոյական հեղուկի մեջ պարբերաբար անհարթ եզր ունեցող առանցքային շերտում: Հետազոտվում են ստացված դիսպերսիոն հավասարումները, ուսումնասիրվում են սահմանային ալիքի փակված ալիքների գոյության և փոխազդեցության հարցերը:

A.R. Mukhsikhachoyan

The wave of Love propagating along the periodical curly edge

Рассматривается распространение сдвиговых поверхностных волн вдоль периодически неровной границы упругого слоя с подложкой. Исследуются полученные дисперсионные уравнения с точки зрения существования и взаимодействия двух типов сдвиговых волн.

Большая практическая значимость привлекла к проблеме распространения поверхностной акустической волны в периодических структурах интерес многих исследователей [1-5]. Для строго синусоидальных неоднородностей с периодом, равным или близким длине поверхностной волны, задача распространения волны Лява была решена в работе [1]. Решение этой же задачи для любых периодических неоднородностей и исследование влияния формы этих неоднородностей на затухание поверхностной волны приведено в работе [2].

Метод решения задачи, используемый в [3], приводит к независимости скорости распространения поверхностной волны от неровности поверхности и результаты сводятся к исследованию амплитуды поверхностной волны в зависимости от степени неровности.

Применяемый подход в работе [4] показывает, что уже в первом приближении скорость сдвиговой поверхностной волны существенно зависит от характеристики неровности поверхности.

Как известно, при ровной границе раздела в изотропном полупространстве (в случае антиплоского напряженно-деформированного состояния) поверхностная волна не распространяется. Однако, немалозвестно, что с прибавлением слоя на полупространство, при определенных условиях появляется сдвиговая поверхностная волна (СПВ)- волна Лява. С другой стороны, известно также, что материалы с неоднородными поверхностями [5] допускают распространение СПВ. Представляется интересным задача, в которой имеется слой (μ_1, ρ_1) с неровной поверхностью раздела с подложкой (μ_2, ρ_2) с точки зрения влияния неровностей на существование волны Лява, и наоборот, влияние слоя на существование волны от неровностей.

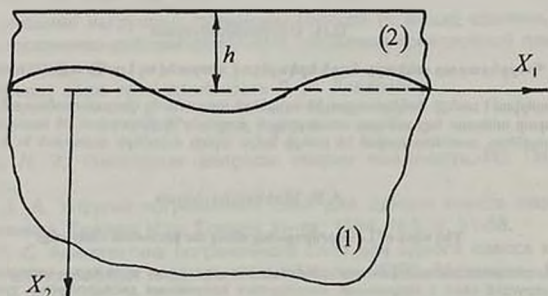
1. Пусть поверхность раздела слоя с подложкой в прямоугольной декартовой координатной системе (x_1, x_2, x_3) задана уравнением

$$x_2 = f(x_1) \quad (1.1)$$

Ось Ox_1 выбираем параллельной, а ось Ox_2 - перпендикулярной к верхней поверхности слоя. Слой занимает область $-h \leq x_2 < f(x_1)$ (фиг. 1).

Поле упругих перемещений задается в виде

$$U_1^{(i)} \equiv 0, \quad U_2^{(i)} \equiv 0, \quad U_3^{(i)} = U_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2$$



фиг. 1

Уравнения движения в слое и в подложке, соответственно, записываются следующим образом:

$$\Delta U_i = c_i^{-2} \ddot{U}_i \quad (1.2)$$

где

$$c_i^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$$

При такой постановке задачи граничное условие на свободной от механических нагрузок поверхности слоя $x_2 = h$ примет следующий вид:

$$\sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad (1.3)$$

Непрерывность перемещений и напряжений на поверхности раздела слой-полупространство (1.1) выражается следующими соотношениями [1]:

$$[U] = 0, \quad [\sigma_{32}] - [\sigma_{31}] \frac{df}{dx_1} = 0 \quad (1.4)$$

где

$$[U] = U_1 - U_2, \quad [\sigma_y] = \sigma_y^{(1)} - \sigma_y^{(2)}$$

Допустим, что нижняя поверхность слоя изменяется по гармоническому закону, т.е.

$$x_2 = f(x_1) = a \cos v_2 x_1 \quad (1.5)$$

где $v_2 = 2\pi / \Lambda \cdot \Lambda$ - период неоднородностей, a - амплитуда ($a < h$). В дальнейшем предполагается, что неровности являются слабыми

$$\varepsilon = \pi a / \Lambda < 1 \quad (1.6)$$

Такое предположение позволяет граничное условие (1.4) удовлетворять на плоскости $x_2 = 0$

Решения уравнений движения в подложке и в слое ищем соответственно в виде

$$U_1 = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x_2) \sin v_n x_1$$

$$U_2 = \exp(i\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_2) \sin v_n x_1 \quad (1.7)$$

где $v_n = \pi n / \Lambda$. Далее, следуя по методу, изложенной в работе [4], для СПВ первой формы ($n=1$) перемещения и дисперсионное уравнение в первом приближении запишутся соответственно:

$$U_1 = A \exp[i\omega t - k\alpha_1 x_2] \sin kx_1$$

$$U_2 = [B \sin(k\alpha_2 x_2) + D \cos(k\alpha_2 x_2)] \exp(i\omega t) \sin kx_1 \quad (1.8)$$

где

$$\alpha_1 = (1 - v^2 / c_1^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = (v^2 / c_2^2 - 1)^{1/2} \quad (1.9)$$

$$g\alpha_2 \operatorname{tg}(k h \alpha_2) - \alpha_1 + \varepsilon(1 - g) = 0 \quad (1.10)$$

где

$$g = \mu_2 / \mu_1$$

Здесь и в дальнейшем под $v = v_1 = \omega / k$ и $k = v_1$ будем понимать, соответственно, фазовую скорость и волновое число поверхностной волны первой формы. Необходимо также отметить, что при выводе решений (1.8) предполагалось, что α_2 является реальной тогда, когда α_1 может быть только реальной в силу затухания волны в подложке.

Легко заметить, что при $\varepsilon = 0$, т.е. когда слой имеет плоские границы, то дисперсионное уравнение (1.10) приводится к классическому дисперсионно-

му уравнению Лява.

2. Рассматривая длинноволновое приближение ($kh \rightarrow 0$), заметим, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 < 1$ вдоль периодически неровной границы раздела слой-подложка распространяется СПВ со скоростью

$$v_0 = c_1 \left[1 - \varepsilon^2(1-g)^2 \right]^{1/2} \quad (2.1)$$

которая больше, чем фазовая скорость СПВ распространяющейся вдоль периодически неровной границы полупространства [4]. Исходя из последнего, можно утверждать, что при $\varepsilon^2(1-g)^2 \geq 1$ поверхностной волны нет.

В зависимости от взаимного расположения трех постоянных величин c_1 , c_2 и v_0 , возможны три разных варианта расположения дисперсионных кривых [6].

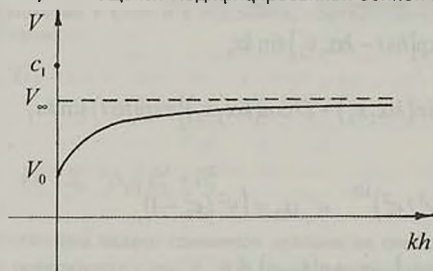
Рассмотрим первый вариант:

$$v_0 < c_1 \leq c_2$$

Как следует из (1.9), α_2 становится мнимой. Пусть $\alpha_2 = i\beta_2$, где β_2 является реальной. Тогда, дисперсионное уравнение (1.10) преобразуется к виду

$$g\beta_2 \operatorname{th}(kh\beta_2) + \alpha_1 - \varepsilon(1-g) = 0 \quad (2.2)$$

Сразу же отметим, что последнее уравнение при $g \geq 1$ решений не имеет. Этот вариант допускает единственную моду распространяющейся поверхностной волны, являющейся модифицированной волной Лява (фиг.2)



фиг.2

Однако, отметим, что такая мода не существует при отсутствии неровности границы, в чем легко убедимся, поставив в уравнение (2.2) $\varepsilon = 0$. При возрастании величины kh , коэффициент затухания волны α_1 монотонно убывает, а фазовая скорость монотонно возрастает, начиная со значения v_0 до конечной величины v_∞ , которая меньше, чем скорость сдвиговой объемной волны подложки c_1 . В коротковолновом приближении ($kh \rightarrow \infty$) определим асимптотическое значение v_∞ , к которой стремится дисперсионная кривая. Тогда, уравнение (2.2) преобразуется к виду [5].

$$g[1 - v^2/c_2^2]^{1/2} + [1 - v^2/c_1^2]^{1/2} = \varepsilon(1 - g) \quad (2.3)$$

Обозначим $v^2/c_1^2 = \sin^2 \varphi$, тогда

$$1 - v^2/c_1^2 = \cos^2 \varphi, \quad 1 - v^2/c_2^2 = 1 - \theta^{-1} \sin^2 \varphi, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

а уравнение (2.3) приводится к виду

$$\cos^2 \varphi - 2\varepsilon(1 - g)\cos \varphi + \varepsilon^2(1 - g)^2 - g^2(1 - \theta^{-1} \sin^2 \varphi) = 0$$

отсюда определим

$$\cos \varphi = \left\{ \varepsilon(1 - g) \pm g \left[\varepsilon^2 \theta^{-1} (1 - g)^2 + (1 - \theta^{-1})(1 - g\rho) \right]^{1/2} \right\} (1 - g\rho)^{-1}$$

где

$$\rho = \rho_2 / \rho_1$$

Оказывается, что такая волна может существовать только при выполнении определенных условий. Выводим эти условия, исходя из того критерия, что фазовая скорость v существует при $kh \rightarrow \infty$. Последнее имеет место только в случае, если уравнение (2.2) будет иметь решение. Используя следующие оценки

$$(1 - v^2/c_1^2)^{1/2} \geq (1 - c_1^2/c_1^2) = 0$$

$$(1 - v^2/c_2^2)^{1/2} \geq (1 - 1/\theta)^{1/2}$$

и учитывая предположение (1.6), необходимое условие запишем

$$g(1 - g)^{-1}(1 - 1/\theta)^{1/2} \leq \varepsilon < 1 \quad (2.4)$$

Однако, потребовав, чтобы левая часть последнего неравенства была меньше единицы, получим

$$g < \left[1 + (1 - 1/\theta)^{1/2} \right]^{-1} \quad (2.5)$$

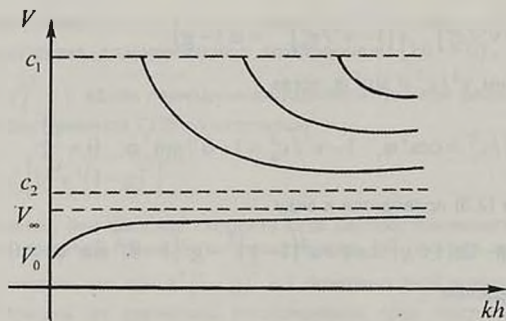
(2.3) и (2.4) составляют условия существования модифицированной поверхностной волны для первого варианта. При $c_1 = c_2$ эти условия упрощаются:

$$0 < \varepsilon < 1, \quad g < 1.$$

Во втором варианте имеем следующее расположение скоростей:

$$c_2 < v_0 < c_1$$

Здесь α_2 становится реальной, и следовательно, рассматривается дисперсионное уравнение (1.10). Соответствующие этому случаю моды изображены на фиг.3. Как видно, они мало отличаются от классических мод волны Лява, а при ровной границе раздела с точностью совпадают с ними. Первая



фиг. 4

В последних двух вариантах с возрастанием фазовой скорости возрастает глубина проникания поверхностной волны.

В конце отметим, что характер изменения мод волны Лява в рассматриваемой задаче аналогично характеру изменения электроупругой волны в системе "пьезоэлектрическое полупространство- проводящий слой" [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуляев Ю.В., Курач Т.Н., Плесский В.П. Отражение поверхностных акустических волн от конечной системы периодических возмущений.- Письма в ЖТФ, 1979, 6, с. 275-278.
2. Лапин А.Д. Распространение поверхностной волны Лява вдоль границы с периодическими неоднородностями.- Акуст.ж., 1980, т.26, вып. 5, с.741-748.
3. Бреховский Л.М. О распространении поверхностных рэлеевских волн вдоль неровной границы упругого тела. - Акуст. ж., 1959, т.5, вып.3, с. 282-289.
4. Белубекян М.В. О распространении упругих сдвиговых волн вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1990, т.90, №2, с. 71-74.
5. Белубекян М.В., Мухсизочоян А.Р. О существовании "стоячей" поверхностной сдвиговой волны вдоль периодически неровной поверхности.- Докл. АН АрмССР, 1992, т.93, №2, с.63-67.
6. R.G.Curtis and M.Redwood Transverse surface waves on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness.- J.Appl. Phys., Vol.44, №5, May, 1973.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.03.1994