

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО  
СОСТАВНОГО КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО ЩЕЛЬ

Акопян В.Н.

Վ.Ն.Հակոբյան

Ճնգր պարունակող անիզոտրոպ բաղադրյալ սեպի  
համար մի խառը խնդրի մասին

Աշխարհաբնում դիրսրվվում է զանաչին անիզոտրոպիայով օժրված երկու քարքեր սեպերից կազմված բաղադրյալ սեպի հակահարթ լարվածային վիճակը, երբ այն սեպերի միացման գծի երկայնքով բուլացված է վերջավոր ճեղքով, որի ափերից մեկի վրա արված են լարումները, իսկ մյուս ափի վրա ազդում է հարթ հիմքով բացարձակ կոշի դրոշմ:

Սրացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները, երկրորդ սեռի սինգուլյար ինքնզրայ հավասարումների րիտքով, և կառուցված են երանց փակ լուծումները:

V.N.Hakobian

On a mixed problem for an anisotrope composite wedge involving a crack

Много работ посвящено исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и кусочно-однородных тел, содержащих концентраторы напряжения различного типа. Отметим из них работы [1-6], которые наиболее тесно связаны с настоящей работой.

Здесь рассматривается антиплоское напряженное состояние анизотропного составного клина, содержащего щель, на одном из берегов которой действует штамп с плоским основанием. Построено замкнутое решение поставленной задачи.

1. Пусть упругий составной клин из двух разнородных клиньев, изготовленных из материалов, обладающих цилиндрической анизотропией, с углами раствора  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, по линии соединения на отрезке  $[a, b]$  ослаблен щелью и деформируется под воздействием плоского штампа, который действует на нижний берег щели, а также касательных напряжений  $\tau_i(r)$ , приложенных к верхнему берегу щели. При этом считается, что боковые кромки клиньев свободны от нагрузок, ось цилиндрической анизотропии проходит через вершину клина и имеет место соотношение  $\alpha\alpha_1 = \beta\alpha_2 = \gamma$ .

Здесь  $\alpha_i = \sqrt{1 - a_{44}^{(i)} / a_{33}^{(i)}} \quad (i = 1, 2)$  комбинации упругих постоянных клиньев.

Необходимо определить контактные напряжения под штампом и по линии соединения клиньев, коэффициенты их интенсивностей в вершинах щели, а также раскрытие щели.

Для определенности в дальнейшем все величины, касающиеся верхнего или нижнего клиньев, будем снабжать индексами 1 и 2, соответственно.

Тогда, поставленная задача математически формулируется в виде следую-

щей смешанной граничной задачи:

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r, a) = \tau_{\vartheta z}^{(2)}(r, -\beta) = 0; \quad (0 < r < \infty)$$

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\vartheta z}^{(2)}(r, 0); \quad w_1(r, 0) = w_2(r, 0); \quad (0 < r < a, \quad b < r < \infty) \quad (1.1)$$

$$\tau_{\vartheta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_1(r); \quad w_2(r, 0) = 0; \quad (a < r < b)$$

Заметим, что функции перемещения  $w_i(r, \vartheta)$  ( $i = 1, 2$ ), каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению [7]

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} - \frac{2\lambda_i}{r} \frac{\partial^2 w_i}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\lambda_i = a_{45}^{(i)} / a_{33}^{(i)}$  - соотношение упругих постоянных соответствующих материалов [7].

Интегрируя уравнения (1.2) при помощи интегрального преобразования Меллина и удовлетворяя условиям (1.1), для определения меры раскрытия щели  $w(r) = w_1(r, 0) - w_2(r, 0)$  ( $a < r < b$ ) и скачка напряжений, действующих на берегах щели,  $\tau(r) = \tau_1(r) - \tau_2(r)$  ( $a < r < b$ ), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$r\tau(r) - \frac{\nu_2}{\gamma} \int_a^b \frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma} - r^{\pi/\gamma}} w'(r_0) dr_0 = \lambda r \tau_1(r)$$

$$\nu_1 r w'(r) - \frac{1}{\gamma} \int_a^b \frac{r_0^{\pi/\gamma}}{r_0^{\pi/\gamma} - r^{\pi/\gamma}} \tau(r_0) dr_0 = 0 \quad (1.3)$$

при условиях

$$\int_a^b \tau(r) dr = T_0; \quad w(a) = w(b) = 0 \quad (1.4)$$

Здесь

$$\nu_i = \frac{a_i a_{44}^{(i)}}{d_i}; \quad d_i = (a_{45}^{(i)})^2 - (a_{44}^{(i)})^2; \quad (i = 1, 2)$$

$$T_0 = \int_a^b \tau_1(r) dr - T_2; \quad \lambda = 1 + \nu_2 / \nu_1$$

а  $T_2$  - действующее на штамп усилие.

При этом контактные напряжения вне щели определяются формулой

$$\tau_{\partial z}^{(j)}(r) = \frac{v_1 v_2}{\gamma r (v_1 + v_2)} \int_a^b \frac{(rr_0)^{\pi/2\gamma}}{r_0^{\pi/2\gamma} - r^{\pi/2\gamma}} w'(r_0) dr_0 \quad (0 < r < a, b < r < \infty) \quad (1.5)$$

Чтобы построить решение системы (1.3), перейдем к новым переменным  $x = r^{\pi/2\gamma}$ ,  $s = r_0^{\pi/2\gamma}$  и введем в рассмотрение новые функции  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) по формулам

$$\varphi_1(x) = x^{2\gamma/\pi} \tau(x^{2\gamma/\pi}); \quad \varphi_2(x) = v_1 x^{2\gamma/\pi} w'(x^{2\gamma/\pi}). \quad (1.6)$$

Далее, продолжив эти функции на отрицательную полуось соответственно нечетным и четным образом, придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \frac{v}{\pi} \int_L \frac{\varphi_2(s)}{s-x} ds &= f(|x|) \operatorname{sgn} x \\ \varphi_2(x) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi_1(s)}{s-x} ds &= 0 \end{aligned} \quad ; \quad (x \in L) \quad (1.7)$$

условия же (1.4) примут вид:

$$\int_{a_1}^b \frac{\varphi_1(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2\gamma} T_0; \quad \int_{a_1}^b \frac{\varphi_2(x)}{x} dx = 0 \quad (1.8)$$

где

$$f(x) = \lambda x^{2\gamma/\pi} \tau_1(x^{2\gamma/\pi}); \quad v = v_2 / v_1$$

$$a_1 = a^{\pi/2\gamma}; \quad b_1 = b^{\pi/2\gamma}; \quad L = (-b_1, -a_1) \cup (a_1, b_1)$$

Умножая второе из уравнений (1.6) на  $\pm\sqrt{v}$  и суммируя с первым, для определения функций  $\psi_{\pm}(x) = \varphi_1(x) \pm \sqrt{v}\varphi_2(x)$  получим отдельные интегральные уравнения:

$$\psi_{\pm}(x) \mp \frac{\sqrt{v}}{\pi} \int_L \frac{\psi_{\pm}(s)}{s-x} ds = f(|x|) \operatorname{sgn} x \quad (x \in L) \quad (1.9)$$

Очевидно, что после определения функций  $\psi_{\pm}(x)$  из (1.9), легко найти функции  $\varphi_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) по формулам:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} [\psi_+(x) + \psi_-(x)]; \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}} [\psi_+(x) - \psi_-(x)] \quad (1.10)$$

2. Приступим к решению уравнений (1.9) в случае, когда щель конечная и не выходит на вершину клиньев, т.е. когда  $0 < a < b < \infty$ .

Общее решение уравнений (1.9) имеют вид [6]

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{f(|x|) \operatorname{sgn} x}{1+\nu} \pm \frac{\sqrt{\nu} X(\mp x)}{1+\nu} \left[ \frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{X(\mp s)(s-x)} ds + p^{\pm}(x) \right] \quad (x \in L) \quad (2.1)$$

Здесь

$$X(x) = -\sqrt{g} \operatorname{sgn} x \begin{cases} (b_1+x)^{-\gamma_1} (a_1+x)^{\gamma_1-1} (x-a_1)^{-\gamma_1} (b_1-x)^{\gamma_1-1} & (a_1 < x < b_1) \\ (b_1+x)^{-\gamma_1} (-a_1-x)^{\gamma_1-1} (a_1-x)^{-\gamma_1} (b_1-x)^{\gamma_1-1} & (-b_1 < x < -a_1) \end{cases}$$

$p^{\pm}(x) = C_1^{\pm} x + C_0^{\pm}$  - многочлен первой степени с неизвестными коэффициентами  $c_j$  ( $j=0,1$ ) и

$$0 < \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arg} g < 1 \quad \left( g = \frac{1-i\sqrt{\nu}}{1+i\sqrt{\nu}} \right)$$

При этом, под  $\operatorname{arg} g$  нужно понимать то значение аргумента числа  $g$ , которое находится в интеграле  $(0, 2\pi)$ .

Подставляя значения функций  $\psi_{\pm}(x)$  из (2.1) в (1.10) и учитывая при этом нечетность  $\varphi_1(x)$  и четность  $\varphi_2(x)$ , получим

$$\varphi_1(x) = \frac{f(|x|) \operatorname{sgn} x}{1+\nu} - \frac{\sqrt{\nu}}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[ \frac{X(x)}{X(s)} - \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds + c_0 [X(x) - X(-x)] + c_1 x [X(x) + X(-x)] \right\} \quad (2.2)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \left[ \frac{X(x)}{X(s)} + \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds + c_0 [X(x) + X(-x)] + c_1 x [X(x) - X(-x)] \right\} \quad (2.3)$$

где  $c_1 = c_1^- = -c_1^+$ ;  $c_0 = c_0^+ = c_0^-$ .

Удовлетворяя условиям (1.8), найдем

$$c_0 = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(|s|) ds}{|s| X(s)} - \frac{1+i\sqrt{\nu}}{\gamma} a_1 b_1 T_0; \quad c_1 = -\frac{I_1 + c_0 I_2}{I_3}$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{x} \int_L \left[ \frac{X(x)}{X(s)} + \frac{X(-x)}{X(-s)} \right] \frac{f(|s|) \operatorname{sgn} s}{s-x} ds$$

$$I_3 = \int_{a_1}^{b_1} [X(x) + (-1)^j X(-x)] \frac{dx}{x^{j-1}},$$

После определения  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ), при помощи интегрирования и формулы (1.5) легко найти раскрытие щели, контактные напряжения вне щели, а также коэффициенты интенсивности контактных напряжений в концевых точках щели.

Вычислим вышеуказанные величины в одном частном случае, когда  $f(x) = T_1 x$ , т.е. в случае  $\tau_1(x) = \frac{T_1}{\lambda} x^{1-2\gamma/\pi}$ . Подставляя значение функции  $f(x)$  в (2.2) и (2.3), вычисляя полученные интегралы и переходя к исходным переменным, для  $\tau_2(r)$  и  $w'(r)$  получим следующие выражения:

$$\tau_2(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{T_1}{\lambda} r^{\pi/2\gamma} - (A_3 r^{3\pi/2\gamma} + A_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^-(r^{\pi/2\gamma}) - (A_2 r^{\pi/\gamma} + A_0) Q^+(r^{\pi/2\gamma}) \right] \quad (2.4)$$

$$w'(r) = \frac{1}{\nu r} \left[ (B_3 r^{3\pi/2\gamma} + B_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^-(r^{\pi/2\gamma}) + (B_2 r^{\pi/\gamma} + B_0) Q^+(r^{\pi/2\gamma}) \right] \quad (2.5)$$

$$(a < r < b)$$

Здесь введены обозначения

$$Q^\pm(x) = X(x) \pm X(-x)$$

$$A_j = \frac{T_1(1+i\sqrt{\nu})}{2(1+\nu)} l_j - \frac{\sqrt{\nu}}{2(1+\nu)} c_j; \quad B_j = -\frac{A_j}{\sqrt{\nu}}; \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

$$l_0 = -\frac{1}{3} \gamma_1 (1 - \gamma_1) (2\gamma_1 - 1) (b_1 - a_1) (2a_1^2 + 2b_1^2 - a_1 b_1)$$

$$l_1 = -2\gamma_1 (1 - \gamma_1) (a_1^2 + b_1^2) - a_1 b_1 (2\gamma_1 - 1)^2$$

$$l_2 = (b_1 - a_1) (2\gamma_1 - 1); \quad l_3 = 1; \quad c_j = 0 \quad (j = 2, 3)$$

Далее, используя формулы (1.5) и (2.5), для контактных напряжений вне щели и раскрытия щели получим:

$$\tau_{\theta z}(r) = \frac{2i\nu g}{(1+\nu)(g-1)r} \left\{ (A_3 r^{3\pi/2\gamma} + A_1 r^{\pi/2\gamma}) [X_1(r^{\pi/2\gamma}) + X_2(r^{\pi/2\gamma})] + (A_2 r^{\pi/\gamma} + A_0) [X_1(r^{\pi/2\gamma}) - X_2(r^{\pi/2\gamma})] - 2A_3 r^{\pi/2\gamma} \right\}$$

$$(0 < r < a; b < r < \infty) \quad (2.6)$$

$$w(r) = \frac{1}{v_1} \int_a^r \left[ (B_3 r^{-3\pi/2\gamma} + B_1 r^{\pi/2\gamma}) Q^- (r^{\pi/2\gamma}) + (B_2 r^{\pi/\gamma} + B_0) Q^+ (r^{\pi/2\gamma}) \right] \frac{dr}{r} \quad (a < r < b) \quad (2.7)$$

При этом

$$X_j(x) = (x+b_1)^{-\gamma_j} (x+a_1)^{\gamma_j-1} (x-a_1)^{-\gamma_j} (x-b_1)^{\gamma_j-1}$$

$$(j=1,2, \gamma_2=1-\gamma_1, \quad 0 < x < a_1; \quad b_1 < x < \infty)$$

Теперь вычислим коэффициенты интенсивности  $\tau_{9z}(r)$  в концевых точках щели  $a$  и  $b$ . С этой целью предположим, что  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Тогда будем иметь

$$K_{III}(a) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow a} (a^{\pi/2\gamma} - r^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} \tau_{9z}(r)$$

$$K_{III}(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow b} (r^{\pi/2\gamma} - b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} \tau_{9z}(r)$$

Вычисление этих пределов для  $K_{III}(a)$  и  $K_{III}(b)$  дает следующие значения:

$$K_{III}(a) = - \frac{i\nu\sqrt{\pi}g[A_3 a^{3\pi/2\gamma} + A_2 a^{\pi/\gamma} + A_1 a^{\pi/2\gamma} + A_0]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)a^{\frac{\pi(1-\gamma_2)}{2\gamma}+1} (a^{\pi/2\gamma} + b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} (b^{\pi/2\gamma} - a^{\pi/2\gamma})^{1-\gamma_1}}$$

$$K_{III}(b) = \frac{i\nu\sqrt{\pi}g[A_3 b^{3\pi/2\gamma} - A_2 b^{\pi/\gamma} + A_1 b^{\pi/2\gamma} - A_0]}{2^{1/2-\gamma_1}(1+\nu)(g-1)b^{\frac{\pi(1-\gamma_1)}{2\gamma}+1} (a^{\pi/2\gamma} + b^{\pi/2\gamma})^{\gamma_1} (b^{\pi/2\gamma} - a^{\pi/2\gamma})^{1-\gamma_1}}$$

Аналогичным путем можно вычислить  $K_{III}(a)$  и  $K_{III}(b)$  в случае  $\gamma_1 < \gamma_2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Штаерман Д.И.* Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов.- ДАН СССР, 1940, т.27, №4, с.330-334.
2. *Черепанов Г.П.* Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.- ПММ, 1962, т.26, вып.5, с.907-912.
3. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.- М.: Наука, 1983. 488 с.
4. *Полов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.- М.: Наука, 1982. 344 с.
5. *Мхитарян С.М.* Об одном классе смешанных задач теории упругости.

Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and related Problems of Analysis" dedicated to the Centenary of Academician N.Muskhelishvili; Tbilisi, 1991, p.35.

6. *Мусхелишвили Н.М.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.- М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
28. 04. 1994