ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 2, 1996 Механика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПРОЧНОСТЬ.

Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц., Маркарян С. Э.

Է.Վ. Բելուբեկյան, Վ.Ց. Գնունի, Ս.Է. Մարգարյան

Կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի սկզբնական գրգռումների մեծագույն արժեքների որոշումը ամրության սահմանափակման դեպքում

Դիտարկվում է եզրագծով ազատ հենված օրթոտրոպ կոմպոզիցիոն նյութի (ԿՆ) մոնոշերտերից պատրաստված սալ: Ենթադրվում է, որ ԿՆ-ի մոնոշերտերը սալի փաթեթում ըստ հաստության տեղադրված են սալի OX առանցքի նկատմամբ հաջորդաբար $\pm\varphi$ անկյան տակ:

Սալի հաստատուն ծավալի դեպքում լուծվում է ԿՆ-ի մոնոշերտերի ըստ հաստության դասավորման անկյունների օպտիմալ ընտրության խնդիրը, որի դեպքում ապահովվում է ամրության պայմանից թույլատրելի սկզբնական գրգռման մեծագույն արժեքը՝ տրված սկզբնական պայմաններով սալի սեփական տատանումների դեպքում:

Դիտարկվում են թվային օրինակներ տարբեր սկզբնական պայմանների եւ սալի գաբարիտային չափերի արժեքների դեպքերում:

Belubekian E. V., Gnuni V. Ts., Markarian S. E.

The Determination of the Maximum values of the Initial Excitation of the Rectangular Plate Made of Composition Material in Case of Strength Limitation

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру прямоугольная пластинка, изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ)

Предполагается, что в пакете пластинки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси OX. В этом случае пакет пластинки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора углов укладки монослоев КМ по толщине пластинки при ее постоянном объеме, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях пластинки с заданными начальными условиями.

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру прямоугольная пластинка размерами a, b, h, изготовленная из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ).

Пластинка отнесена к прямоугольной системе координат $0xyz$ так, что координатная плоскость $z = 0$ совпадает с срединной плоскостью пластинки.

Предполагается, что в пакете пластинки по толщине монослои КМ расположены поочередно под углами $\pm\varphi$ к оси $0x$. В этом случае пакет пластинки в целом можно считать ортотропным.

Решается задача оптимального выбора углов укладки монослоев КМ по толщине пластинки при ее постоянном объеме, обеспечивающего наибольшее допустимое из условия прочности максимальное значение начального возмущения при собственных колебаниях пластинки с начальными условиями.

Рассматриваются числовые примеры при различных начальных условиях и значениях габаритных размеров пластинки.

Следует отметить, что оптимизационные задачи колебаний пластин при различных ограничениях и критериях оптимальности (наибольшая низшая частота колебаний, вес конструкции и т.д.) рассматривались во многих работах.Однако, насколько нам известно, в приведенной здесь постановке задача колебаний пластинки рассматривается впервые. Результаты ее решения могут иметь важное значение при исследовании вопросов динамики тонкостенных конструкций.

1. Дифференциальное уравнение собственных колебаний ортотропной пластинки имеет вид [1]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

где: $w(x,y,t)$ - функция прогибов пластинки, ρ - плотность КМ, t - время, $D_{ik}=B_{ik}h^3/12$ - изгибные жесткости пластинки, B_{ik} - характеристики упругости монослоя пластинки по ее главным геометрическим направлениям $0x$ и $0y$, которые выражаются через характеристики упругости по главным физическим направлениям B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Начальные условия пластинки принимаются в виде

$$w\big|_{t=0}=C\,f_1(x,y),\qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\chi C\,f_2(x,y) \tag{2}$$

где C и χC - соответственно максимальные значения начального прогиба и скорости; $\left|f_i(x,y)\right|<1$ - заданные функции распределения начальных прогиба и скорости, которые могут быть разложены в ряды Фурье

$$f_1(x,y)=\sum_m\sum_n f_{1mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \tag{3}$$

$$f_2(x,y)=\sum_m\sum_n f_{2mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y$$

где:

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{a},\qquad \mu_n=\frac{n\pi}{b},$$

$$f_{1mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_1(x,y)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,dx\,dy$$

$$f_{2mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f_2(x,y)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,dx\,dy$$

Функция прогибов, удовлетворяющая условиям шарнирного опирания пластинки, представляется в виде

$$w=\sum_m\sum_n w_{mn}(t)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в уравнение (1) и условия (2), получается уравнение для определения функции $w_{mn}(t)$

$$w''_{mn}(t)+\omega^2_{mn}w_{mn}(t)=0 \qquad (5)$$

и соответствующие начальные условия

$$w_{mn}(t)\big|_{t=0}=Cf_{1mn},\quad w'_{mn}(t)\big|_{t=0}=\chi Cf_{2mn} \qquad (6)$$

где

$$\omega^2_{mn}=\frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda^4_m+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\lambda^2_m\mu^2_n+D_{22}\mu^4_n\right) \qquad (7)$$

Решая уравнение (5) с удовлетворением условий (6) и подставляя полученное решение в (4), для функции прогибов получается следующее выражение:

$$w=C\sum_m\sum_n\left(f_{1mn}\cos\omega_{mn}t+\chi\frac{f_{2mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right)\sin\lambda_m x\sin\mu_n y \qquad (8)$$

Деформации в главных геометрических направлениях пластинки определяются по формулам

$$e_{xx}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad e_{yy}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad e_{xy}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

Деформации e_{11},e_{22},e_{12} пластинки по направлениям укладки монослоев КМ определяются по известным формулам поворота [2], а напряжения в тех же направлениях определяются по формулам

$$\sigma_{11}=B^0_{11}e_{11}+B^0_{12}e_{22},\quad \sigma_{22}=B^0_{12}e_{11}+B^0_{22}e_{22},\quad \sigma_{12}=B^0_{66}e_{12}$$

Условие прочности пластинки принимается в виде [3]

$$\prod(\sigma_{ik})=\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{B1}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{B2}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_{B0}}\right)^2-\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma^2_{B1}}\le 1 \qquad (9)$$

где - $\sigma_{B1},\sigma_{B2},\tau_{B0}$ - прочностные характеристики КМ.

Ставится задача определения оптимального значения угла укладки φ, обеспечивающего наибольшее значение начального максимального прогиба C (или начальной скорости χC) при заданном значении χ, неизменном объеме пластинки и удовлетворении условия прочности (9).

Учитывая линейную зависимость напряжений от максимального начального возбуждения C, условие (9) можно представить в виде

$$\prod(\sigma_{ik})=C^2\bar{\prod}(\sigma_{ik})\le 1 \qquad (10)$$

При заданном значении χ из условия прочности (10) в наиболее опасной точке пластинки в плоскости $(x,y,0{,}5h)$, в зависимости от параметра φ, определяются значения

$$C(\varphi)\left[\max_{x,y,t}\bar{\prod}(\sigma_{ik})\right]^{-1/2} \quad \text{при } z=0{,}5h \tag{11}$$

Варьированием значением угла φ определяется оптимальный проект пластинки, при котором начальное возмущение $C(\varphi)$ достигает наибольшего значения.

Таким образом, поставленная задача оптимизации сводится к нахождению

$$C=\max_{\varphi}\left[\max_{x,y,t}\bar{\prod}(\sigma_{ik})\right]^{-1/2} \tag{12}$$

при ограничении

$$0\le\varphi\le 90^0$$

2. Численная реализация задачи произведена для случая, когда функции $f_i(x,y)$ заданы в виде

$$f_1(x,y)=f_2(x,y)=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

В качестве КМ приняты однонаправленный углепластик и стеклопластик СВАМ 5:1, соответственно со следующими характеристиками:

$$B_{22}^0=0{,}33B_{11}^0,\quad B_{12}^0=0{,}0082B_{11}^0,\quad B_{66}^0=0{,}16B_{11}^0$$
$$\sigma_{B1}^0=1{,}9\cdot10^{-2}B_{11}^0,\quad \sigma_{B2}=0{,}25\cdot10^{-2}B_{11}^0,\quad \tau_{B0}=0{,}075\cdot10^{-2}B_{11}^0$$

и

$$B_{22}^0=0{,}62B_{11}^0,\quad B_{12}^0=0{,}12B_{11}^0,\quad B_{66}^0=0{,}16B_{11}^0$$
$$\sigma_{B1}^0=1{,}89\cdot10^{-2}B_{11}^0,\quad \sigma_{B2}=0{,}77\cdot10^{-2}B_{11}^0,\quad \tau_{B0}=0{,}5\cdot10^{-2}B_{11}^0$$

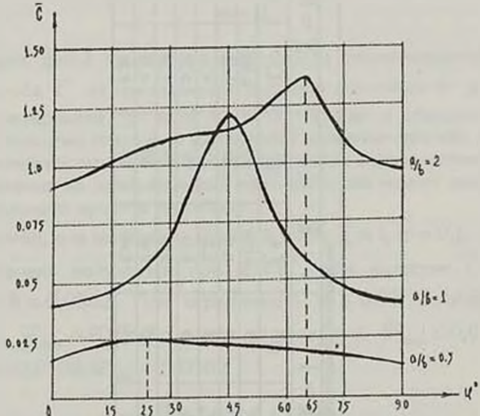
Определен оптимальный угол φ и соответствующее значение приведенного начального прогиба $\bar{C}=C/h$ или скорости $\bar{\chi}\bar{C}$ $\left(\bar{\chi}=\chi\left(12\rho a^4/\pi^4B_{11}^0h^2\right)^{1/2}\right)$ при $\bar{\chi}=0{,}1,\infty$, для различных значений приведенной толщины пластинки $\bar{h}=h/b$ и отношений сторон a/b. Здесь $\bar{\chi}=0$ соответствует отсутствию начальной скорости $(\chi C=0)$, а $\bar{\chi}=\infty$ - отсутствию начального прогиба $(C=0)$.

В табл. 1 значения $\bar{C}$, $\bar{\chi}\bar{C}$, φ приведены для обоих материалов при $\bar{h}=0{,}1$ и различных значениях a/b.

Из таблицы следует, что в случае однонаправленного углепластика при всех значениях $\bar{\chi}$ оптимальные углы φ получаются одинаковыми при заданном значении a/b, причем при увеличении a/b этот угол увеличивается стремясь к $\varphi=90^0$ для длинной пластинки.

Для случая материала СВАМ 5:1 углы получаются одинаковыми при $\overline{\chi} = 0$ и $\overline{\chi} = 1$. Причем здесь происходит довольно резкий переход от $\varphi = 0^0$ к $\varphi = 45^0$ и $\varphi = 90^0$ в зависимости от изменения отношения сторон пластинки. Расчеты показывают, что промежуточные значения оптимальных углов получаются при a/b в интервале (0,75; 1,25).

Интересно отметить, что в случае материала СВАМ 5:1 наиболее опасными точками пластинки являются $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0{,}5$, в то время как для пластинки из углепластика в зависимости от значений a/b и угла φ наиболее опасной является также точка $\overline{x} = \overline{y} = 0$, $\overline{z} = 0{,}5$, что объясняется сравнительно малым значением предела прочности на сдвиг τ_{B0} углепластика. В результате, как следует из табл. 1, при увеличении значения a/b в случае материала СВАМ 5:1 имеет место увеличение наибольшего значения допустимого максимального начального прогиба пластинки, а в случае однонаправленного углепластика, начиная со значения $a/b = 1$ наибольшее значение начального прогиба остается неизменным.



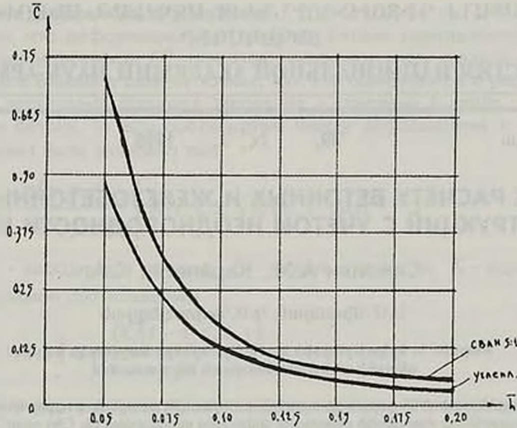
фиг. 1

На графиках фиг. 1 для случая однонаправленного углепластика показаны изменения максимального прогиба $\overline{C}$ в зависимости от угла укладки φ при $\overline{h} = 0{,}1$, $\overline{x} = 1$ для значений $a/b = 0{,}5$; 1, 2.

Как следует из этих графиков, при $a/b = 1$ наибольшее значение $\overline{C}\left(\varphi = 45^0\right)$ получается в три раза больше его наименьшего значения $\left(\varphi = 0^0, 90^0\right)$, что указывает на возможность существенного увеличения допустимого начального прогиба пластинки путем оптимального выбора угла φ. При других рассмотренных значениях a/b это увеличение несколько меньше: при $a/b = 0{,}5$ оно составляет 1,5 раза, при $a/b = 2 - 1{,}9$ раза.

Таблица 1

a / b	Однонаправленный углепластик						СВАМ 5:1					
	$\bar{\chi}=0$		$\chi=1$		$\chi=\infty$		$\bar{\chi}=0$		$\bar{\chi}=1$		$\chi=\infty$	
	C	φ^0	C	φ^0	$\bar{\chi}$ C	φ^0_c	C	φ^0	C	φ^0	$\bar{\chi}$ C	φ^0
0.5	0.034	25	0.25	25	0.036	25	0.086	0	0.064	0	0.097	0
0.75	0.080	40	0.063	40	0.10	40	0.15	0	0.12	0	0.20	25
1.0	0.14	45	0.12	45	0.23	45	0.20	45	0.17	45	0.36	45
1.25	0.15	50	0.13	50	0.31	50	0.26	90	0.23	90	0.56	60
1.5	0.14	55	0.13	55	0.37	55	0.30	90	0.28	90	0.83	75
1.75	0.14	60	0.13	60	0.46	60	0.33	90	0.32	90	1.2	90
2.0	0.14	65	0.13	65	0.65	65	0.34	90	0.34	90	1.6	90



фиг.2

На графиках фиг.2 приведены зависимости максимального допустимого значения прогиба $\overline{C}$ от приведенной толщины пластинки $\overline{h}$ для обоих рассмотренных материалов при $a/b=1$ и $\overline{x}=1$. Как и следовало ожидать, с увеличением толщины пластинки допустимое значение прогиба уменьшается.

Следует отметить, что если в рассматриваемой задаче оптимизации ввести также ограничение на максимальный прогиб, то это может привести к изменению оптимального проекта пластинки.

Так, например, для материала СВАМ 5:1 при $\overline{\chi}=1$, $\overline{h}=0{,}1$, $a/b=0{,}5$ оптимальный проект получается при $\varphi=0^0$, при котором $\overline{C}=0{,}0644$, а $\overline{w}_{max}=w_{max}/h=0{,}0862$. При ограничении $\overline{w}\leq 0{,}08$ получается $\varphi=35^0$, $\overline{C}=0{,}0586$, $\overline{w}_{max}=0{,}0792$, а при ограничении $\overline{w}_{max}\leq 0{,}07$ получается $\varphi=55^0$, $\overline{C}=0{,}0506$, $\overline{w}_{max}=0{,}0702$

Литература

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967, 534с.
2. *Timoshenko S. P. and Goodier J. N.* Theory of Elasticity, ed., Mc Craw - Hill-New York: 1951.
3. *Бажанов З. Л., Гольденблат И. И. и др.* Сопротивление стеклопластиков-.М.: Машгиз, 1968.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
19.05.1995