

**ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ
КОМБИНАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Баблоян А.А., Макарян В.С.

Ա.Տ. Բաբլոյան, Վ.Ս. Մակարյան

Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կոմբինացիաներ
պարունակող զույգ ինտեգրալ հավասարումներ

Աշխատանքում դիտարկվում են քնդիանուր փխալի զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք պարունակում են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների (0.1) կոմբինացիաները: Ներկայացնելով անհայտ ֆունկցիան փարբեր փնքերով, զույգ հավասարումները բերվում են կամ Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը փարբեր փիրոյթներում կամ քվադր-լիովին ռեզոլյար-անվերջ համակարգի: Նաշվված են զույգ հավասարումների մեջ մփնող ինտեգրալների այմեքները ամբողջ կիսաառանցքի վրա:

A.H. Babloyan, V.S. Makaryan

Dual Integral Equations, Involving Combinations of Trigonometric Functions

Парными уравнениями занимались многие авторы [1-7]. Общие подходы для решения отдельных классов парных уравнений предложены в работах [4-5]. Обзор по парным уравнениям содержится в работах [4-5].

В данной работе рассматриваются парные интегральные уравнения, содержащие следующие комбинации тригонометрических функций:

$$\chi(\beta, t) = \gamma \sin \beta t - \beta \cos \beta t, \quad \eta(\beta, t) = \gamma \cos \beta t + \beta \sin \beta t \quad (0.1)$$

Разложения по функциям (0.1), а также рассматриваемые здесь парные уравнения встречаются в задачах теории упругости при удовлетворении граничным условиям в радиальных направлениях [9, 11]. На полуоси ($0 < t < \infty$) формулы разложения произвольной функции в интеграл Фурье по функциям (0.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\gamma H_0(\gamma) e^{-\gamma t} \int_0^\infty f(x) e^{-x\gamma} dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi(\beta, t) d\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^\infty f(x) \chi(\beta, x) dx \\ f(t) &= -2\gamma H_0(\gamma) e^{-\gamma t} \int_0^\infty f(x) e^{-x\gamma} dx + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta(\beta, t) d\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^\infty f(x) \eta(\beta, x) dx \end{aligned} \quad (0.2)$$

где γ - произвольное число, а $H_0(\gamma)$ - функция Хевисайда

$$H_0(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma > 0 \\ 0, & \gamma < 0 \end{cases}$$

Для полноты здесь же приведем соответствующие формулы разложения для конечной области ($0 < t < T$)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2\gamma e^{-\eta}}{1 - e^{-2\gamma}} \int_0^T f(x) e^{-\gamma x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\chi_k(t)}{T(\beta^2 + \gamma^2)} \int_0^T f(x) \chi_k(x) dx \\ f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{2\gamma e^{-\eta}}{1 - e^{-2\gamma}} \int_0^T f(x) e^{-\gamma x} dx + \\ &+ \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k(t)}{\beta^2 + \gamma^2} \int_0^T f(x) \eta_k(x) dx \end{aligned} \quad (0.3)$$

где

$$\chi_k(t) = \gamma \sin \beta_k t - \beta_k \cos \beta_k t, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{T}$$

$$\eta_k(t) = \gamma \cos \beta_k t + \beta_k \sin \beta_k t \quad (0.4)$$

При $\gamma=0$ из (0.2) и (0.3) получаются соответствующие формулы разложения по синусам и косинусам.

При решении парных интегральных уравнений используются формулы обращения интегральных уравнений Абеля, разрывные интегралы Сонина и др. Все эти формулы содержатся в книгах [4, 5, 7] и др., поэтому здесь не приводим.

Сперва рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} Ae^{-\eta} + \int_0^{\infty} \beta' Y(\beta) (1 - \gamma(\beta)) \chi(\beta, t) d\beta &= f(t) \quad (a < t < \infty) \\ cAe^{-\eta} + \int_0^{\infty} Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= g(t) \quad (0 < t < a) \end{aligned} \quad (0.5)$$

где $t = \pm 1$, $\gamma \geq 0$ и c - заданные числа, $f(t)$ и $\gamma(t)$ - интегрируемые, а $g(t)$ - кусочно-дифференцируемая функция, причем существует такое число $\varepsilon > 0$, для которого имеют место

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{\varepsilon t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma t e^{\varepsilon t} = 0 \quad (0.6)$$

В уравнениях (0.5) неизвестными являются коэффициент A , функция

$Y(\beta)$, а также значение первого (второго) интеграла в области $0 < t < a$ ($a \leq t < \infty$).

1. Первый способ решения при $l = 1$.

Умножая уравнения (0.5) на $e^{-\gamma t}$ и проинтегрируя первое из них в пределах (t, ∞) , а второе - в пределах $(0, t)$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] \sin \beta t d\beta &= f_2(t) \quad (a < t < \infty) \\ \int_0^{\infty} Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= -g_2(t) \quad (0 < t < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(t) &= f_1(t) - \frac{A}{2\gamma} e^{-\gamma t}, \quad g_2(t) = g_1(t) - \frac{cA}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma t \\ f_1(t) &= \int_t^{\infty} e^{\gamma(t-x)} f(x) dx, \quad g_1(t) = \int_0^t e^{\gamma(t-x)} g(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Парные уравнения (1.1) рассматривались в работах [2-7], где они с использованием интегральных представлений функции Бесселя

$$J_0(\beta x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos \beta t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{\sin \beta t dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (1.3)$$

сначала приводим к виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] J_0(\beta x) d\beta &= F_2(x) \quad (a < x < \infty) \\ \int_0^{\infty} Y(\beta) J_0(\beta x) d\beta &= -G_2(x) \quad (0 < x < a) \end{aligned} \quad (1.4),$$

а затем, по формуле обращения Ханкеля, для определения неизвестной функции $Y(\beta)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] + \int_0^{\infty} z \gamma(z) Y(z) dz \int_0^a x J_0(\beta x) J_0(zx) dx = \\ \int_0^{\infty} x H_2(x) J_0(\beta x) dx \quad (0 \leq \beta < \infty) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$H_k(x) = \begin{cases} -G_k(x) & (0 \leq x \leq a) \\ F_k(x) & (a \leq x < \infty) \end{cases} \quad (k = 1; 2) \quad (1.5)$$

$$G_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{g'_k(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}, \quad F_k(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{f_k(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \quad (1.6)$$

$$G_2(x) = G_1(x) - c A I_0(\gamma x), \quad F_2(x) = F_1(x) - \frac{A}{\pi \gamma} K_0(\gamma x)$$

При получении (1.6) были использованы интегральные представления функций Бесселя от мнимого аргумента

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^{\nu} I_{\nu}(\gamma z) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_0^z (z^2 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} c h \gamma y dy \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{2z}{\gamma}\right)^{\nu} K_{\nu}(\gamma z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)} \int_z^{\infty} e^{-\gamma y} (z^2 - y^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dy$$

Неизвестную постоянную A будем определять из условия ограниченности первого (второго) интеграла уравнений (1.1), (0.5), когда $t \rightarrow a - 0$ ($t \rightarrow a + 0$).

Это условие приводит к соотношению

$$G_2(a) + F_2(a) + \int_0^{\infty} \gamma Y(z) Y(z) J_0(za) dz = 0 \quad (1.8)$$

В силу (1.6) соотношение (1.8) представляем в виде

$$A \left[c I_0(\alpha \gamma) + \frac{1}{\pi \gamma} K_0(\alpha \gamma) \right] = G_1(a) + F_1(a) + \int_0^{\infty} \gamma Y(z) Y(z) J_0(za) dz \quad (1.9)$$

Отметим, что (1.8) является условием эквивалентности парных уравнений (0.5) (при $l = 1$) и (1.1). В случае $\gamma(\beta) \equiv 0$ (1.8) превращается в условие непрерывности функции $H_2(x)$ в точке $x = a$. При $\gamma(\beta) \equiv 0$ и $a \rightarrow 0$ из (1.8) получается выражение для коэффициента свободного члена первого разложения (0.2). При условии (1.8) интегральное уравнение (1.5) принимает вид

$$\beta Y(\beta) [1 - \gamma(\beta)] + \int_0^{\infty} z^2 \gamma(z) Y(z) dz \int_0^a x J_1(\beta x) J_1(xz) dx =$$

$$= - \int_0^{\infty} x H_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (0 \leq \beta < \infty) \quad (1.10)$$

Из (1.5) и (1.10) для интегралов, входящих в (0.5) при $l = 1$, получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= [G_2'(a) + F_2'(a) + U'(a)] \frac{a H_0(a-t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} + \\ + * \int_1^{\infty} \frac{[x H_2'(x)]' - \gamma t H_2'(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx - H_0(a-t) \int_1^{\infty} \frac{[x U''(x)]' - \gamma t U''(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta &= g(0) - cA + \int_0^{\infty} \frac{\gamma x H_2(x) - t H_2'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx + \\ + H_0(t-a) \int_a^{\infty} \frac{\gamma x U(x) - t U'(x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\text{где } U(x) = \int_0^{\infty} \beta \gamma(\beta) Y(\beta) J_0(\beta x) d\beta \quad (1.13)$$

а * перед знаком интеграла означает, что влияние обобщенных функций, фигурирующих в подынтегральном выражении, на значение интеграла не учитывается, т.к. оно уже учтено при выделении первого слагаемого формулы (1.11).

Пользуясь решением интегрального уравнения Абеля из (1.11) и (1.12), получим

$$\int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = \gamma f_2(t) - f_2'(t) = f(t) - A e^{-\eta} \quad (a < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} \beta Y(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = g_2'(t) - g_2(t) \gamma = g(t) - c A e^{-\eta} \quad (0 < t < a)$$

т.е. функция $Y(\beta)$, действительно, является решением уравнений (0.5).

2. Второй способ решения (0.5) при $l = 1$.

Приведем уравнения (0.5) к виду (1.1) и представим функцию $Y(\beta)$ в виде

$$\beta Y(\beta) = \beta \int_a^{\infty} x Z(x) J_0(\beta x) dx - \beta \int_0^a x G_2(x) J_0(\beta x) dx =$$

$$= - \int_a^{\infty} x Z'(x) J_1(\beta x) dx + \int_0^a x G_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (2.1)$$

где принято

$$Z(a) + G_2(a) = 0 \quad (2.2)$$

функция $Z(x)$ подлежит к определению, а $G_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6).

На основе (2.1) и (2.2) вычислим интегралы, входящие в (1.1) (1.10)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_0^a \left\{ \frac{t H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} - x \int_0^{\infty} \gamma(\beta) J_1(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} \times \\ &\times G_2'(x) dx - \int_a^{\infty} \left\{ \frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} - x \int_0^{\infty} \gamma(\beta) J_1(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} Z'(x) dx \quad (2.3) \\ \int_0^{\infty} Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_a^{\infty} \frac{x Z(x) H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx - \int_0^a \frac{x G_2(x) H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx \quad (0 < t < \infty) \\ \int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= \int_0^a \left\{ H_0(x-t) - x \int_0^{\infty} \gamma(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \right\} G_2'(x) dx - \\ &- \int_a^{\infty} \left\{ H_0(x-t) - x \int_0^{\infty} \gamma(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \right\} Z'(x) dx \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вторые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя первым уравнениям (1.1) или (1.4), для определения функции $Z(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} Z(t) - \int_a^{\infty} x Z(x) dx \int_0^{\infty} \beta \gamma(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta = \\ = F_2(t) - \int_0^a x G_2(x) dx \int_0^{\infty} \beta \gamma(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \quad (a < t < \infty) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Неизвестную постоянную A будем определять из соотношения (2.2), а интегралы в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (2.3).

3. Третий способ решения (0.5) при $l = 1$

Представим решение парных уравнений (0.5) или (1.1) в виде

$$\beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) = \beta \int_a^{\infty} x F_2(x) J_0(\beta x) dx - \beta \int_0^a x Z(x) J_0(\beta x) dx =$$

$$= \int_0^a x Z'(x) J_1(\beta x) dx - \int_a^\infty x F_2'(x) J_1(\beta x) dx \quad (3.1)$$

где

$$F_2(a) + Z(a) = 0 \quad (3.2)$$

а функция $F_2(x)$ определяется формулами (1.2) и (1.6). На основе (3.1) и (3.2) вычислим интегралы, входящие в уравнения (1.1) и (1.4).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta [1 - \gamma(\beta)] Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= t \int_0^a Z'(x) \frac{H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx - \\ &- t \int_a^\infty \frac{F_2'(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx, \quad (0 \leq t < \infty) \\ \int_0^\infty Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_a^\infty \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^a \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x F_2(x) dx - \\ &- \int_0^a \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^a \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x Z(x) dx + \\ \int_0^\infty \beta Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= \int_0^a x Z'(x) dx \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta - \\ &- \int_a^\infty x F_2'(x) dx \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta + \begin{cases} -Z(t) & (t \leq a) \\ F_2(t) & (t \geq a) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что при выборе (3.1) первые уравнения (0.5) и (1.1) удовлетворяются тождественно. После удовлетворения (1.1) и (1.4) для определения неизвестной функции $Z(t)$ получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} Z(t) + \int_0^a x Z(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta &= \\ &= G_2(t) + \int_a^\infty x F_2(x) dx \int_0^\infty \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) J_0(\beta t) d\beta \quad (0 \leq t \leq a) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\gamma_1(\beta)$ определяется из соотношения

$$[1 - \gamma(\beta)][1 + \gamma_1(\beta)] = 1 \quad (3.5)$$

Постоянную A будем определять из (3.2), а интегралы, входящие в (0.5) легко вычисляются при помощи формул (3.3).

Отметим, что правая часть уравнения (3.4) зависит от неизвестного постоянного A , вследствие чего функция $Z(t)$ является линейной функцией от A . Поэтому значение A целесообразно определить только после решения (3.4).

4. Четвертый способ решения (0.5) при $l = 1$

Представим решение парных уравнений в виде

$$\begin{aligned} \beta[1 - \gamma(\beta)]Y(\beta) &= \beta \int_a^\infty x F_2(x) J_0(\beta x) dx + \sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a) = \\ &= -a F_2(a) J_1(\beta a) - \int_a^\infty x F_2'(x) J_1(\beta x) dx + \sum_{k=0}^\infty b_k J_{2k+1}(\beta a) \end{aligned} \quad (4.1)$$

и вычислим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta[1 - \gamma(\beta)]Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= -F_2(a) \frac{t H_2(a-t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \int_a^\infty \frac{t F_2'(x) H_0(x-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dx + \\ &+ H_0(a-t) \sum_{k=0}^\infty b_k \frac{\sin(2k+1)u_0}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Y(\beta) \sin \beta t d\beta &= \int_a^\infty \left\{ \frac{H_0(t-x)}{\sqrt{t^2 - x^2}} + \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \sin \beta t d\beta \right\} x F_2(x) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^\infty \frac{b_k}{2k+1} \left[(2k+1) \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) \sin \beta t \frac{d\beta}{\beta} + \left\{ \frac{\sin(2k+1)u_0}{(-1)^k q_0^{2k+1}}, \quad (t \leq a) \right\} \right] \\ \int_0^\infty \beta Y(\beta) J_0(\beta t) d\beta &= F_2(t) H_0(t-a) - a F_2(a) \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta a) J_0(\beta t) d\beta - \int_a^\infty x F_2'(x) dx \times \\ &\times \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_1(\beta x) J_0(\beta t) d\beta + \sum_{k=0}^\infty b_k \left\{ \frac{H_0(a-t)}{a} P_k \left(1 - \frac{2t^2}{a^2} \right) + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_0(\beta t) d\beta \right\} \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned}$$

где $P_k(x)$ - полином Лежандра, $\gamma_1(\beta)$ определяется формулой (3.5),

$$u_0 = \arcsin \frac{t}{a}, \quad q_0 = \frac{t - \sqrt{t^2 - a^2}}{a} \quad (4.3)$$

Приравнявая нулю коэффициент при особенности в первой формуле (4.2), получим уравнение для определения A .

$$aF_2(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \quad (4.4)$$

Из (4.2) следует, что функция (4.1) удовлетворяет первым уравнениям (0.5) и (1.1). Удовлетворяя вторым уравнениям (1.1) и (1.4), для определения неизвестных постоянных b_k получим бесконечную систему

$$\begin{aligned} \frac{b_p}{2(2p+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} \beta^{-1} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_{2p+1}(\beta a) d\beta = \\ = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{g_2(t) \sin(2p+1)u_0}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt - \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$- \int_a^{\infty} x F_2(x) dx \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2p+1}(\beta a) J_0(\beta x) d\beta \quad (p=0,1,2,\dots)$$

Пользуясь асимптотическими формулами бесселевых функций, легко доказать, что система (4.5) в общем случае квазивполне регулярна, т.к. сумма модулей коэффициентов при неизвестных при $p \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Отметим, что сходимость ряда (4.4) можно улучшить при помощи соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\frac{(-1)^k}{a} + \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) J_0(\beta a) d\beta \right] + G_2(a) + \\ + \int_a^{\infty} x F_2(x) dx \int_0^{\infty} \beta \gamma_1(\beta) J_0(\beta a) J_0(\beta x) d\beta = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

которое получается из (4.2) и второго уравнения (1.4).

После решения бесконечной системы (4.5) постоянную A будем определять из (4.4), а значения интегралов, входящих в (0.5), будем определять по формулам

$$\int_0^{\infty} \beta [1 - \gamma(\beta)] \gamma(\beta) \chi(\beta, t) d\beta = \int_0^{\infty} \frac{[x F_2'(x)]' - \gamma t F_2'(x)}{\sqrt{x^2 - t^2}} H_0(x-t) dx +$$

$$+ \frac{H_0(a-t)}{\sqrt{a^2-t^2}} \left\{ aF_2'(a) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{a} \times \right. \\ \left. \times \left[(2k+1)U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right) - 1 + 2\left(\gamma a - \frac{\gamma t^2}{a} - \frac{t}{a}\right)U_k\left(\frac{t}{a}\right)U_{k-1}\left(\frac{t}{a}\right) \right] \right\} \\ (0 < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} Y(\beta)\chi(\beta, t)d\beta = \int_a^{\infty} \frac{\gamma x F_2(x) - t F_2'(x)}{\sqrt{t^2 - a^2}} H_0(t-x)dx - \\ - t F_2(a) \frac{H_0(t-a)}{\sqrt{t^2 - a^2}} + \int_a^{\infty} x F_2(x)dx \quad (4.7)$$

$$\int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_0(\beta x) \chi(\beta, t) d\beta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\infty} \gamma_1(\beta) J_{2k+1}(\beta a) \chi(\beta, t) \frac{d\beta}{\beta} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{a} \left[\frac{\gamma a}{2k+1} \begin{cases} T_{2k+1}\left(\frac{t}{a}\right) & (t \leq a) \\ q_0^{2k+1} & (t \geq a) \end{cases} + \begin{cases} -U_{2k}\left(\frac{t}{a}\right) & (t < a) \\ \frac{a q_0^{2k+1}}{\sqrt{t^2 - a^2}} & (t > a) \end{cases} \right]$$

Нетрудно доказать, что в силу условия (4.4) второе выражение (4.7) при $t \rightarrow a \pm 0$ остается ограниченным.

В (4.7) $T_k(x)$ и $U_k(x)$ - полиномы Чебышева первого и второго родов соответственно.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad \sqrt{1-x^2} U_k(x) = \sin[(k+1) \arccos x]$$

Таким образом, парные уравнения (0.5) при $l=1$ и $\gamma(\beta) \neq 0$ сводятся или к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода для различных интервалов, или же к бесконечной системе. Во всех случаях при $\gamma(\beta) \equiv 0$ получается замкнутое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noble B. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method - Proc. Camb. Phil. Soc., 1963, v. 59, No 2, 351-362.
2. Цейтлин А.И. О методе парных интегралов и парных рядов и его приложениях к задачам механики - 1966, ПММ, т. 30, No2.
3. Sneddon I.N. Mixed Boundary value problems in Potential theory. - Amsterdam: North-Holl Publ. Com. 1966, 283.

4. Развитие теории контактных задач в СССР. - М. Наука, 1976.
5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977.
6. Баблюян А.А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. - ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. - Инженерно-физический журнал, 1963, том 6, No 10, 67-71.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды, М.: Наука, т.1-3, 1981.
9. Макарян В.С., Саргсян В. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1990, т.42, No 2.
10. Баблюян А.А., Мкртчян А.М. Решение смешанной задачи для прямоугольника. - Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т.25, No 2.
11. Баблюян А.А., Тоноян В.С. Плоская задача для ортотропного кольцевого сектора. - Изв. Ан Арм ССР физ-мат наук, 1964, т 17, No 5.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995