

**МОДУЛЯЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Багдоев А. Г. Мовсисян Л. А.

Ա. Գ. Բագդոև, Լ. Ա. Մովսիսյան

Ոչ զծային առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթի մաղաղացքին կայունությունը

Դիտարկվում է ֆիզիկորեն ոչ զծային առաձգամածուցիկ զլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ ծոման ալիքների մոդուլացիոն կայունությունը: Ընդունված է նյութի անսխալմիջուկայինը եւ մածուցիկութունը ընդհանուր տեսքով:

Արագված են պայմաններ ալիքի փարածման կայունության համար:

A. G. Bagdoyev, L. A. Movsisian

The Modulation Stability of Non-linear Viscoelastic Cylindrical Shell

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Принимается несжимаемость материала оболочки.

Получены условия устойчивости распространения модуляционной волны. Наличие вязкости приводит к неустойчивости независимо от вида нелинейности.

Изучается устойчивость осесимметричных изгибных волн модуляций в физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке. Нелинейность берется по [1] в кубическом виде, а вязкие операторы различны для линейной и нелинейной частей [2]. Подобная задача для пластины частного вида вязкости рассматривалась в работе [3]. Принимается также несжимаемость материала оболочки. Тогда в пределах применимости теории Кирхгоффа для нормальных компонентов усилий и изгибающего момента имеем

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 4\tilde{G}_1 h (\varepsilon_1 + 0,5\varepsilon_2) + \frac{32}{3} \tilde{G}_2 h \gamma_2 \left[ \varepsilon_1^3 + \frac{h^2}{4} \varepsilon_1 \chi_1^2 + \right. \\
 &+ 1,5\varepsilon_2 \left( \varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12} \chi_1^2 \right) + 1,5\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + 0,5\varepsilon_2^3 \left. \right] \\
 T_2 &= 4\tilde{G}_1 h (\varepsilon_2 + 0,5\varepsilon_1) + \frac{32}{3} \tilde{G}_2 h \gamma_2 \left[ \varepsilon_2^3 + \right. \\
 &+ 1,5\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + 1,5\varepsilon_2 \left( \varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12} \chi_1^2 \right) + 0,5\varepsilon_1 \left( \varepsilon_1^2 + \frac{h^2}{12} \chi_1^2 \right) \left. \right]
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$M = \frac{1}{3} \tilde{G}_1 h^3 \chi_1 + \frac{8}{3} \tilde{G}_2 h^3 \gamma_2 \left[ \varepsilon_1^2 \chi_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \chi_1 + 0,5 \varepsilon_2^2 \chi_1 + \frac{h^2}{20} \chi_1^3 \right]$$

Здесь  $h$  - толщина, а  $R$  - радиус оболочки,

$$\tilde{G}_j u = G \left( u - \int \Gamma_j(t - \tau) u(\tau) d\tau \right), \quad G \text{ - модуль сдвига}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Уравнения движения берем в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{dt^2} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.1) и (1.2) в (1.3), ищем ее решение в виде

$$u = be^{it} + \bar{b} e^{-it}, \quad w = ce^{it} + \bar{c} e^{-it} \quad (1.4)$$

$$\tau = kx - \omega t, \quad \omega = \omega_1 + i\omega_2$$

Тогда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\rho \omega^2 = G \left[ (1 - \Gamma_c^{(1)} - i\Gamma_s^{(1)}) \left( \frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right) + \right. \\ \left. + 2\gamma_2 (1 - \Gamma_c^{(2)} - i\Gamma_s^{(2)}) \left( \frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} e^{2\omega_2 t} c \bar{c} \right) \right] \\ \Gamma_c^{(j)} = \int_0^\infty \Gamma_j(y) \cos \omega y dy, \quad \Gamma_s^{(j)} = \int_0^\infty \Gamma_j(y) \sin \omega y dy \quad (1.5)$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right) A^2, \quad A = 2|c| \quad (1.6)$$

где линейная частота и коэффициент затухания определяется

$$\omega^{(0)} = \omega_1^{(0)} + i\omega_2^{(0)} \\ \omega_1 = \left( \frac{G}{\rho} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right) [1 - \Gamma_c^{(1)}(\omega_1^{(0)})] + \right. \\ \left. + 2 [1 - \Gamma_c^{(2)}(\omega_1^{(0)})] \left( \frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right) \gamma_2 e^{2\omega_2 t} c \bar{c} \right\}^{1/2} \quad (1.7)$$

$$\omega_1^{(0)} = \omega_1(\gamma_2 = 0)$$

$$\omega_2^{(0)} = \omega_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_s^{(1)}(\omega_1^{(0)}) \omega_1^{(0)}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial A^2} = D_1 + iD_2$$

$$D_1 = \frac{1}{4} \frac{G}{\rho} \frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}} \left( \frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right) e^{2\omega_1^{(0)} t}$$

$$D_2 = -D_1 \frac{\Gamma_s^{(2)}(\omega_1^{(0)}) \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)}}{\omega_1^{(0)}}$$

2. На основании (1.6) уравнение модуляции запишется в виде [4]

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega^{(0)}}{dk} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega^{(0)}}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i(D_1 + iD_2) |a|^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$w = ae^{i\tau_0} + \bar{a}e^{-i\tau_0}, \quad \tau_0 = kx - \omega^{(0)}t, \quad A = 2|a|$$

Для исследования на устойчивость модуляции представляется  $a = a' \exp(i\varphi)$  и тогда из (2.1) получится

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} \frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^{(0)}}{dk^2} \left[ \frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - a' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^{(0)}}{dk^2} \left( 2 \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - D_2 a' |a|^2 = 0$$

$$a' \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} a' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} \frac{\partial a'}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_1^{(0)}}{dk^2} \left[ \frac{\partial^2 a'}{\partial x^2} - \right. \quad (2.2)$$

$$\left. - a' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_2^{(0)}}{dk^2} \left( 2 \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + D_1 a' |a|^2 = 0$$

При исследовании на устойчивость следует полагать

$$a' = a'_0 + \delta a', \quad \varphi = \varphi_0 + \delta \varphi \quad (2.3)$$

Тогда, в нулевом приближении получится

$$\frac{\partial a'_0}{\partial t} - D_2 (a'_0)^3 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + D_1 (a'_0)^2 = 0 \quad (2.4)$$

в решение уравнений возмущения

$$\delta a' = F \exp(iT), \quad \delta \varphi' = \Phi \exp(iT), \quad T = Kx - \Omega t \quad (2.5)$$

в предположении  $\exp(2\omega_2^{(0)}(t)) \approx \text{const}$  приводит к следующему соотношению:

$$z^2 - 3D_2(a_0')^2 z + z_1(z_1 + 2D_1(a_0')^2) = 0 \quad (2.6)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1^{(0)}}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2^{(0)}}{dk^2} K^2$$

$$z_1 = iK \frac{d\omega_2^{(0)}}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2} K^2$$

Условие устойчивости волн модуляций, после отбрасывания малых более высокого порядка, на основании (2.6) с учетом (1.4) запишется в виде

$$\omega_2^{(0)} + \Omega^* \leq 0 \quad (2.7)$$

где

$$\Omega^* = \text{Im } \Omega.$$

Для получения более обозримых результатов, довольствуясь адиабатическим приближением, получим

$$\Omega^* = \frac{3}{2} D_2(a_0')^2 \quad \text{при} \quad D_1 > 0 \quad (2.8)$$

$$\Omega^* = \frac{3}{2} D_2(a_0')^2 + \sqrt{|D_1| \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2} a_0' K} \quad \text{при} \quad D_1 < 0 \quad (2.9)$$

Из приведенных условий (2.7) - (2.9) видно, что если недиссипативная волна устойчива, то при наличии диссипации она также будет устойчивой, а в случае неустойчивой недиссипативной волны, диссипация может привести к устойчивости при выполнении условия

$$\omega_2^0 + \frac{3}{2} D_2(a_0')^2 + \sqrt{|D_1| \frac{d^2\omega_1^{(0)}}{dk^2} a_0' K} \leq 0 \quad (2.10)$$

Для оценки полученных условий изучим пример оболочки со следующими данными. Пусть ядра операторов-экспоненциального типа и одинаковы для линейной и нелинейной частей-

$$\Gamma_1(t) = \frac{G - G_\infty}{Gn} \exp\left(-\frac{t}{n}\right), \quad G_\infty = 0,5G$$

При малой вязкости (время релаксации -  $n$ -большое)  $\Gamma_e \approx 0$ ,

$\Gamma_x \approx 0,25/n\omega_1^{(0)}$  и линейная частота и коэффициент затухания определяются

$$\omega_1^{(0)} = \sqrt{\frac{G}{\rho} \left( \frac{h^2 k^4}{3} + \frac{3}{R^2} \right)^{1/2}}, \quad \omega_2^0 = -\frac{1}{2} \Gamma_x \omega_1^{(0)} = -0,25 \frac{1}{n}$$

а

$$D_1 = \frac{1}{4} \frac{G}{\rho} \frac{\gamma_2}{\omega_1^{(0)}} \left( \frac{h^4 k^8}{5} + \frac{2h^2 k^4}{R^2} + \frac{17}{R^4} \right), \quad D_2 = -0,25 D_1 \frac{1}{n\omega_1^{(0)}}$$

Для пластинки ( $R \rightarrow \infty$ ) условие (2.10) после отбрасывания малых порядка  $(a'_0)^2$  переписывается в виде

$$0,25 \frac{1}{n} \geq \sqrt{\frac{|\gamma_2| G}{10 \rho}} a'_0 K h^2 k^3 \quad (2.11)$$

что выполнимо для весьма малых амплитуд и волновых чисел волны огибающей.

Для цилиндра же с данными  $kh = 10^{-1}$ ,  $Rk = 10$  аналогичное условие будет

$$0,25 \frac{1}{n} \geq 23,18 \cdot 10^{-3} \sqrt{|\gamma_2| \frac{G}{\rho}} a'_0 K k \quad (2.12)$$

то есть для оболочки устойчивость будет для меньших значений  $a'_0 K$ , чем для пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каудерер Г. Нелинейная механика.-М.: ИЛ, 1961. 777с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердого тела.-М.: Наука, 1977. 384 с.
3. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.- Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т.36, №2, с. 3-9.
4. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах- М.: Наука, 1973. 175 с.
5. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир, 1977. 622 с.
6. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984, 432 с.
7. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. Некоторые вопросы распространения квази-монохроматических нелинейных волн в пластинах и оболочках. - Тр. XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, Т. I., с. 106-112.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
15. 10. 1993