ՏԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈԻԹՅՈԻՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 49, № 1, 1996 Механика

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРОВОГО СЕКТОРА

Геворкян Г. З., Макарян В. С.

Գ. Զ. Գեւորգյան, Վ. Ս. Մակարյան

Գ նղային սեկտորի համար կոնտակտային խնդիր

Դիրարկված է առաձգական գեղային սեկտորի և կոչդը ողորկ կռնի կոնդրակցույին խնդիդը։ Գևդի և կռնի գագաթները համընկնում են։ Գնդային մակերևույթի վրա գորված են լարումները։ Կառուցված է ինդրի փակ լուծումը, ուսումնասիրված է լարվածային վիճակը, բացանայորված են լարումների եզակիությունները, գւրնված են արդյաջին բեռնավորման ձևեր, որունց դեպքում լարումների կուղուսկումները վերանում են։

G. Z. Gevorkian, V. S. Makarian

The Contact Problem for a Sector of a Sphere

Рассматривается контахт упругого шарового сектора с жестким гладким конусом. Вершина конуса совпадает с центром шара. На сферической части поверхности заданы напряжения. Построено замкнутое решение задачи, исследовано напряженное состояние, выделены особенности напряжений, найдены формы внешних нагрузок при которых концентрация напряжений исчезает.

Построению общих решений дифференциальных уравнений теории упругости в сферических координатах, решению конкретных задач и обзору литературы посвящены [1-8].

Плоская задача для кругового сектора с жестким гладким клином была рассмотрена ранее в [9].

В сферической системе координат дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для осесимметричной задачи без учета массовых сил имеют вид

$$(\lambda + 2\mu)r\sin\theta\frac{\partial e}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(\omega\sin\theta) = 0$$
$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\omega}{\partial \theta} - 2\mu\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) = 0$$
$$e = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2U_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(U_\theta\sin\theta)$$
$$\omega = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta)\right]$$

(1)



фиг. 1

где λ, μ- коэффициенты Ламе.

Общее решение уравнений (1) для конуса с произвольным углом раствора $\boldsymbol{\theta}_{0}$ представляется в виде [4,5]:

$$U_r(r,\theta) = u_0(r,\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) P_{v_k}(\cos\theta) + \int_0^{\infty} f_1(\theta,\gamma) T_1(r,\gamma) d\gamma$$
$$U_0(r,\theta) = v_0(r,\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) P_{v_k}^1(\cos\theta) + \int_0^{\infty} f_2(\theta,\gamma) T_2(r,\gamma) d\gamma$$

где

$$\begin{split} u_{k}(r) &= r^{v_{k}+1} A_{k}(v_{k}+1) [v_{k} - (v_{k}+2)a] + v_{k} B_{k} r^{v_{k}-1} + \\ &+ r^{-v_{k}} C_{k} v_{k} [v_{k}+1 - (v_{k}-1)a] + D_{k}(v_{k}+1) r^{-v_{k}-2} \\ v_{k}(r) &= r^{v_{k}+1} A_{k} [v_{k}+3 - (v_{k}+1)a] + B_{k} r^{v_{k}-1} + \\ &+ r^{-v_{k}} C_{k} [-v_{k}+2 + v_{k}a] - D_{k} r^{-v_{k}-2}; \quad (v_{k} > 0) \\ f_{1}(\theta) &= A(\gamma) \cos \theta P_{m}(\cos \theta) + B(\gamma) \sin \theta P_{m}^{1}(\cos \theta) \\ f_{2}(\theta) &= C(\gamma) \sin \theta P_{m}(\cos \theta) + D(\gamma) \cos \theta P_{m}^{1}(\cos \theta) \\ T_{k}(r) &= r^{ee} (E_{k} \sin \gamma t + F_{k} \cos \gamma t), \quad k = 1,2 \\ \alpha &= -\frac{1}{2}, \quad m = -\frac{1}{2} + i\gamma, \quad t = \ln \frac{R}{r} \end{split}$$

В случае конуса, содержащего вершину r=0, постоянные $C_k,\ D_k$ берем

(2)

равными нулю. В случае же полой сферы (усеченного конуса) эти постоянные сохраняются.

V_k определяются из трансцендентного уравнения, которое зависит от граничных условий на конической поверхности.

 $u_0(r, \theta)$, $V_0(r, \theta)$ - частные решения, вид которых зависит от типа граничных функций.

Напряжения определяются через перемещения по закону Гука.

Граничные условия в рассматриваемом случае следующие:

$$U_{0}(r,\theta_{0}) = \alpha_{0}r, \quad \tau_{r\theta}(r,\theta_{0}) = 0 \qquad (0 \le r \le R)$$

$$\sigma_{r}(R,\theta) = f(\theta), \quad \tau_{r\theta}(R,\theta) = g(\theta) \qquad (0 \le \theta \le \theta_{0})$$
(3)

Если взять уравнение, определяющее v_k в виде $P_{*_k}^1(\cos\theta_0) = 0$, то условие для касательного напряжения на конической поверхности удовлетворяется тождественно, а условие $U_0(r,\theta_0) = \alpha_0 r$ в данном виде позволяет вычислить интегралы в выражениях для перемещений и напряжений.

В этом случае для перемещений получим:

$$U_r(r,\theta) = A_0 r + \frac{2}{3} \alpha_0 a r \left[h_2(\theta) - h_0(\theta) + c t g\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \ln r \right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} u_k(r) P_{v_k}(\cos\theta) \tag{4}$$

$$U_{e}(r,\theta) = \alpha_{0}r \left[\frac{\partial}{\partial r}h_{2}'(\theta) + \left(1 - \frac{\partial}{\partial r}\right)h_{0}'(\theta)\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{v}_{k}(r)P_{\mathbf{v}_{0}}^{1}(\cos\theta)$$

где

$$h_0(\theta) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \left[1 + 2\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\ln\left(\cos\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

$$h_2(\theta) = \frac{1}{6} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \frac{3\cos 2\theta + 1}{6\sin 2\theta_0}$$

Для компонент напряжений получим формулы

$$\frac{\sigma_r(r,\theta)}{\mu} = S_0 + \frac{4}{3}\alpha_0 a \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) P_{\nu_k}(\cos\theta)$$
$$\frac{\sigma_0(r,\theta)}{\mu} = S_0 + 2\alpha_0 \left[\frac{a}{3}h_2''(\theta) + \left(1 - \frac{a}{3}\right)h_0''(\theta)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_{1k}(r) P_{v_{k}}(\cos\theta) + T_{2k}(r) P_{v_{k}}^{1}(\cos\theta) \right]$$

$$\frac{\sigma_{\varphi}(r,\theta)}{\mu} = S_{0} + 2\alpha_{0} \operatorname{ctg} \left\{ \left[\frac{a}{3} h_{2}'(\theta) + \left(1 - \frac{a}{3} \right) h_{0}'(\theta) \right] \right]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \left[F_{1k}(r) P_{v_{k}}(\cos\theta) + F_{2k}(r) P_{v_{k}}^{1}(\cos\theta) \right]$$

$$\frac{\tau_{r\varphi}(r,\theta)}{\mu} = \frac{2ct_{\theta}a}{3} \left[h_{2}'(\theta) - h_{0}'(\theta) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{k}(r) P_{v_{k}}'(\cos\theta)$$
(5)

k=1

где

$$S_{0} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_{0} + \frac{2\alpha_{0}(1+\nu)}{3(1-\nu)} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_{0}}{2}\right) \ln r + \\ + \frac{2\alpha_{0}}{3(1-\nu)} \left[2(1-2\nu) h_{2}(\theta) + (1+\nu) h_{0}(\theta) + \frac{\nu(4-5\nu)}{1-2\nu} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta_{0}}{2}\right) \right] \\ R_{k}(r) = 2u_{k}'(r) - \frac{2\nu}{1-\nu} e_{k}(r), \qquad \tau_{k}(r) = \nu_{k}'(r) + \frac{u_{k}(r) - \nu_{k}(r)}{r} \\ T_{1k}(r) = \frac{2u_{k}(r)}{r} - 2n_{1}\frac{\nu_{k}(r)}{r} - \frac{2\nu}{1-\nu} e_{k}(r), \qquad z_{k}(r) = -2\nu_{k}(r) \frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{r}$$

$$F_{1k}(r) = \frac{2u_k(r)}{r} - \frac{2v}{1-v}e_k(r), \qquad F_{2k}(r) = 2v_k(r)\frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{r}$$
(6)
$$e_k(r) = A_k(v_k+1)(2v_k+3)r^{v_k}, \qquad n_1 = v_k(v_k+1)$$

Удовлетворяя граничным условиям на сферической поверхности и решая полученные уравнения относительно ${\it \Lambda}_k, {\it B}_k$, для постоянных входящих в решение задачи получим

$$A_{0} = -\frac{\alpha_{0}}{3} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0}}{2} + \frac{(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)} f_{0}$$

$$\Delta_{k}A_{k} = \frac{1-\nu}{2\mu} (\nu_{k}g_{k} - f_{k}) + \frac{\alpha_{0}\Omega_{k}(1+\nu+\nu\nu_{k})}{n_{l}(\nu_{k}+3)}$$

$$\nu_{k} - l)\Delta_{k}B_{k} = \frac{f_{k}}{4\mu} [2\nu - 2 + (\nu_{k}+l)^{2}] + \frac{g_{k}(\nu_{k}+l)}{4\mu} [2\nu - (\nu_{k}+l)(\nu_{k}-2)] - \frac{g_{k}(\nu_{k}-l)}{4\mu} [2\nu - (\nu_{k}-l)(\nu_{k}-2)] - \frac{g_{k}(\nu_{k}-l)}{4\mu} [2\nu - (\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)] - \frac{g_{k}(\nu_{k}-l)}{4\mu} [2\nu - (\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu_{k}-l)(\nu$$

$$\frac{\alpha_0 \Omega_k v_k}{2(1-v)n_1(n_1-6)} \Big[(v_k^2 - 1)(1+v+vv_k) - 2(1-v^2)(3+v_k) \Big]$$

где

$$\Delta_k = v_k^2 + v_k + 1 + v(2v_k + 1), \qquad (1 - \cos\theta_0)f_0 = \int_0^{2} f(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$g_{k}\omega_{k} = n_{1}\int_{0}^{0} g(\theta)P_{u}^{1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \ f_{k}\omega_{k} = \int_{0}^{0} f(\theta)P_{v_{k}}(\cos\theta)\sin\theta d\theta \ (7)$$
$$\omega_{k} = \int_{0}^{0} P_{v_{k}}^{2}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = -\frac{\sin\theta_{0}P_{v_{k}}(\cos\theta_{0})}{2v_{k}+1}\frac{\partial P_{v_{k}}^{1}(\cos\theta_{0})}{\partial v_{k}}$$

$$\Omega_{k} = -\sin\theta_{0}P_{v_{k}}(\cos\theta_{0})/\omega_{k} \quad (k = 1, 2...)$$

В табл. 1 приведены значения ν, и ω, для некоторых значений θ₀.

Таблица1

θ	k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi/6$	Vk	6.83540	12.9083	18.9364	24.9514	30.9606	36.9669	42.9715	48.9749
	ω	0.02224	0.01235	0.00855	0.00654	0.00529	0.00444	0.00383	0.00337
$\pi/4$	V_k	4.40533	8.44711	12.4633	16.4719	20.4773	24.4809	28.4835	32.4855
	w _k	0.05003	0.02778	0.01923	0.01471	0.01190	0.01000	0.00862	0.00758
$\pi/3$	Vk	3,19569	6.21953	9.22885	12.2338	15.2369	18.2390	21.2405	24.2416
	ω _k	0.08894	0.04939	0.03419	0.02614	0.02116	0.01778	0.01533	0.01347
π/2	Vk	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.
	w,	0.20000	0.11111	0.07692	0.05882	0.04761	0.03999	0.03448	0.03030
$2\pi/3$	V_k	1.42412	2.90434	4.39574	5.89100	7.38801	8.88596	10.3845	11.8833
	ω _k	0.35408	0.19741	0.13673	0.10457	0.08465	0.07111	0.06130	0.05387
$3\pi/4$	V_k	1.24508	2.54899	3.86854	5.19403	6.52234	7.85219	9.18298	10.5144
	ω	0.44490	0.24952	0.17298	0.13233	0.10713	0.09000	0.07758	0.06818
$5\pi/6$	V_k	1.11565	2.27797	3.45796	4.64583	5.83779	7.03210	8.22787	9.42462
1.000.0	ω _k	0.53975	0.30671	0.21324	0.16326	0.13222	0.11109	0.09577	0.08417

Для корней с большими индексами можно использовать асимптотическую формулу [4]

$$\left(\mathbf{v}_{k}+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{\theta}_{0} = \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi - \frac{3\,\boldsymbol{\theta}_{0}\,\,\mathrm{ctg}\,\,\boldsymbol{\theta}_{0}}{2\,\pi(4\,k+1)}$$

или рекуррентное соотношение

$$v_{k+1} = v_k + \pi/\theta_0 + O(v_k^3), \qquad k > 8$$

Из выражений для напряжений видно, что особенности напряжений в

центре шара обусловлены наличием логарифмического слагаемого в свободных членах и первыми членами рядов, содержащих r^{v_1-z} , которая фигурирует во всех напряжениях при коэффициенте B_1 . Анализ и численые результаты табл.2 показывают, что первый корень уравнения $P_1^1(\cos\theta) = 0$, $v_1 \ge 2$ при $\textcircled{B}_0 \le \pi/2$, а при $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ $1 < v_1 < 2$. То есть степенная особенность в напряжениях проявляется, когда упругая часть больше полушара. В табл. 2 приведены значения первых корней v_1 трансцендентного уравнения, определяющие степень особенностей напряжений при вершине конуса в зависимости от θ_0 . Вычисления проведены начиная с $\theta_0 = 2.5^\circ$ с шагом 2.5° ($\pi/72$). Таблица составлена по возрастанию θ_0 по строкам

Таблица 2

87.318	43.411	28.776	21.460	17.070	14.145	12.055	10.489
9.270	8.296	7.499	6.835	6.274	5.793	5.376	5.012
4.691	4.405	4.150	3.921	3.713	3.525	3.353	3.196
3.051	2.918	2.795	2.680	2.574	2.475	2.383	2.296
2.215	2.139	2.067	2	1.936	1.876	1.820	1.766
1.715	1.667	1.621	1.577	1.536	1.497	1.460	1.424
1.390	1.358	1.328	1.299	1.271	1.245	1.220	1.197
1.175	1.154	1.134	1.116	1.098	1.083	1.068	1.054
1.042	1.032	1.022	1.015	1.008	1.004	1.001	1

Следовательно, при $r \to 0$ напряжения можно представить асимптотическими формулами

 $\frac{\sigma_r^*(r,\theta)}{\mu} = R_0^* + R_1^* \ln r + R_2^* r^{\nu_1 - 2}, \ \frac{\sigma_\theta^*(r,\theta)}{\mu} = T_0^* + T_1^* \ln r + T_2^* r^{\nu_1 - 2}$

$$\frac{\sigma_{\phi}^*(r,\theta)}{\mu} = F_0^* + F_1^* \ln r + F_2^* r^{\nu_1 - 2} , \quad \frac{\tau_{r0}^*(r,\theta)}{\mu} = \tau_0^* + \tau_1^* \ln r + \tau_2^* r^{\nu_1 - 2}$$

где

$$R_{0}^{*} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_{0} + \frac{2\alpha_{0}(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0}}{2} + \frac{2\alpha_{0}}{3(1-\nu)} \left[(1-2\nu) h_{2}(\theta) - (1+\nu) h_{0}(\theta) \right]$$
$$T_{0}^{*} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A_{0} + 2\alpha_{0} \sqrt{\left[\frac{1}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu}\right]} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0}}{2} + \frac{\alpha_{0}}{3(1-\nu)} \left[2(1-2\nu) h_{2}(\theta) - 2(1+\nu) h_{0}(\theta) + (1-2\nu) h_{2}^{''}(\theta) + (5-4\nu) h_{0}^{''}(\theta) \right]$$

$$F_{0}^{*} = \frac{2(1+v)}{1-2v} A_{0} + 2\alpha_{0} \sqrt{\left[\frac{1}{3(1-v)} + \frac{1}{1-2v}\right]} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0}}{2} + \\ + \frac{\alpha_{0}}{3(1-v)} \left[2(1-2v)h_{2}(\theta) - 2(1+v)h_{0}(\theta) + \left[(1-2v)h_{2}^{'}(\theta) + (5-4v)h_{0}^{'}(\theta)\right] \operatorname{ctg} \theta\right] \\ \tau_{0}^{*} = \frac{\alpha_{0}(1-2v)}{3(1-v)} \left[h_{2}^{'}(\theta) - h_{0}^{'}(\theta)\right] \\ R_{1}^{*} = T_{1}^{*} = F_{1}^{*} = \frac{\alpha_{0}(1+v)}{3(1-2v)} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0}}{2}, \qquad \tau_{1}^{*} = 0 \\ R_{2}^{*} = -f_{1}^{*}v_{1}(v_{1}-1)P_{v_{1}}(\cos\theta), \qquad T_{2}^{*} = -\left[v_{1}^{*}P_{v_{1}}(\cos\theta) + \operatorname{ctg} \theta P_{v_{1}}^{1}(\cos\theta)\right]f_{1} \\ F_{2}^{*} = \left[v_{1}P_{v_{1}}(\cos\theta) + \operatorname{ctg} \theta P_{v_{1}}^{1}(\cos\theta)\right]f_{1}, \qquad \tau_{2}^{*} = -2f_{1}^{'}(v_{1}-1)P_{v_{1}}^{*}(\cos\theta)$$

Распределение напряжений и значения коэффициентов особенностей напряжений зависят от формы внешних нагрузок и от области их приложення.

На фиг. 2-5 приведены графики распределения напряжений на поверхности контакта шара и конуса $\theta = \theta_0 = 5\pi/6$. Во всех последующих графиках

 $\sigma_r - - -, \sigma_0 - - , \sigma_{\varphi}$

Рассмотрим несколько вариантов нагрузок:

1.Внешние нагрузки отсутствуют $f(\theta) = g(\theta) = 0, \ \alpha_0 = 1.$

В этом случае напряжения возникают из-за нормальных перемещений, заданных на берегах конической выемки, имеют как логарифмическую, так и степенную особенности, коэффициент которой зависит линейно от α_0 .



2. Сосредоточенная сила при , $\theta_0 = 0$, $f(\theta) = \frac{\mu\delta(\theta)}{2\pi\sin\theta}$, $g(\theta) = 0$, $\alpha_0 = 0$ причем определяется из условия $\frac{P}{\mu R^2} = \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{\theta_0} \sigma_r(R,\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta = 1$, где P-равнодейстующая внешних нагрузок по оси $\theta = 0$.



фиг. 3

3. Нормальные силы, распределенные по окружности $\theta = \theta_1$, где θ_1 определяется из уравнения $P_{v_1}(\cos\theta_1) = 0$, $\alpha_0 = 0$, $f(\theta) = \mu\delta(\theta_1 - \theta) / \pi \sin 2\theta_1$, $g(\theta) = 0$, $P / \mu R^2 = 1$



Таблица З

θ	θι	θ₀	θ	θ₀	θ
1.61443	0.979878	1.65806	1.00425	1.7017	1.02842
1.74533	1.05238	1.78896	1.07612	1.8326	1.09962
1.87623	1.12288	1.91986	1.14588	1.9635	1.16861
2.00713	1.19105	2.05076	1.21319	2.0944	1.235
2.13803	1.25648	2.18166	1.27759	2.22529	1.29832
2.26893	1.31864	2.31256	1.33853	2.35619	1.35796
2.39983	1.37689	2.44346	1.3953	2.48709	1.41314
2.53073	1.43037	2.57436	1.44696	2.61799	1.46284
2.66163	1.47796	2.70526	1.49227	2.74889	1.50568
2.79253	1.51813	2.83616	1.52952	2.87979	1.53977
2.92343	1.54876	2.96706	1.55639	3.01069	1.56253
3.05433	1.56706	3.09796	1.56985		

В табл.3 приведены значения θ_1 решений $P_{\gamma}(\cos\theta) = 0$, при которых исчезают степенные особенности в напряжениях при $r \to 0$, для различных θ_0 .

4. Нормальные силы, распределенные по поверхности $0 \le \theta \le \theta_0 / 2$,

$$f(\theta) = \frac{2\mu H(\theta - \theta_1)}{\pi (1 - \cos 2\theta_1)}, \quad g(\theta) = 0, \ \alpha_0 = 0, \quad P / \mu R^2 = 1, \quad H(\theta_1 - \theta_1) - \phi$$
ункция

Хевисайда.



5. При $\alpha_0 = 0$ и равномерном нагружении сферической поверхности нормальными сжимающими силами, касательные напряжения всюду исчезают, нормальные напряжения $\sigma_r = \sigma_0 = \sigma_{\phi}$ - всюду внутри тела и мы имеем дело с всесторонним сжатием.

Интересно сравнить эти результаты с результатами [9]. Простые формулы в плоском случае давали возможность сделать качественные выводы относительно поведения напряжений, их особенностей и свойствах внешних нагрузок, устраняющих степенные особенности напряжений (коэффициент особенности в центре сектора превращается в нуль).

Когда внешняя нагрузка задана в виде сосредоточенных нормальных сил, приложенных по линии $\theta = \theta_1$, в обоих случаях существуют значения θ_1 при которых степенная особенность исчезает во всех напряжениях. В случае плоской задачи $\theta_1 = \theta_0 / 2$, а в осесимметричном случае θ_1 определяется из уравнения $P_v(\cos\theta_0) = 0$, где v_1 - первый корень уравнения $P_v^1(\cos\theta_0) = 0$.

Причем, значения $\theta_1 > \theta_0 / 2$ и при $\theta_0 \to \pi$, $\theta_1 \to \theta_0 / 2$. Существуют и другие виды нагружения, также устраняющие степенные особенности напряжений.

Литература

- 1. Ляв А. Математическая теория упругости.-М.: Физматгиз. 1970.
- 2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости.- М.: 1955.
- 3. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости.-М.: Стройиздат, 1987. 337 с.
- Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел.-Киев: Наукова Думка, 1978.
- 5. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функциий в пространствен-

ных задачах теории упругости.-Киев: Наукова думка, 1979.

- Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу.-ПММ, 1964, т. 28, в. 6, 1101-1105.
- Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса.-ПММ, 1970, т. 34, в. 2, с. 339-348.
- Keer L. M., Parihar K. S. Elastic Stress Singularities at Conical Inclusions. Int. Journal of Solids and Structures. 1978, vol. 14, №4, 261-263.
- 9. Макарян В. С., Саркисян В. Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, № 2, 3-11.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 10.01.1996