

**ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О
ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕЖДУ ФУНДАМЕНТОМ И ЕГО
УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ**

Абрамян Б.Л.

Բ.Լ.Աբրահամյան

Կառուցվածքի հիմնաքաղի և նրա առանցքային հիմքի միջև փոխազդեցության
մասին դինամիկ կոնքալգալիս խնդիրներ

Տաճառայ ձևով ցույց են տրվում կառուցվածքի կոշիկ հիմնաքաղի և նրա ոտանգտված հիմքի միջև
փոխազդեցության ուղիղաբան 20-րդ դարում կապարված աշխատանքները

B. L. Abrahamyan

**Dynamic Contact Problems on Interaction Between the Building's
Footing and Its Elastic Foundation**

Исследование вопросов, касающихся взаимодействия между колеблющимся упругим сооружением, его жесткого фундамента и упругого основания, на котором они установлены, с сейсмическими волнами, проходящими через упругое основание, имеет важное практическое значение.

По-видимому, в рамках линейной теории упругости, возможно установить взаимосвязь между геометрическими и физическими параметрами сооружения, его фундамента и упругого основания сейсмическими параметрами, и варьированием этих параметров достигнуть для сейсмических параметров минимальных значений.

Произведенные исследования в этой области представляются выполненными, в некоторых случаях, с упущениями. При исследовании вопросов иногда принимаются такие исходные допущения, что полученные конечные результаты для искомых величин, к сожалению, оказываются, или неубедительными, или такие, что их невозможно применять на практике. В редких случаях в исследованиях учитывается собственный вес массивного сооружения.

Из-за отсутствия возможности подробного изложения о методах, применяемых при исследовании рассмотренных задач, и о полученных результатах, в упомянутых ниже исследованиях, здесь приводятся лишь краткие литературные указания.

Взаимодействия между жестким фундаментом сооружения и его упругим основанием в некоторой мере исследовались и до нашего столетия и результаты этих исследований, безусловно, использовались в строительной технике. Из новых исследований, выполненных в 20-ом веке, относящихся к взаимодействию между жесткими фундаментами сооружений и их упругих оснований, на которых расположены фундамент с сооружением, и через которые проходит сейсмическая волна, в первую очередь следует отметить исследования М.Био [1] и А.Г.Назарова [2,3].

В первой из этих работ строится математическая теория колебаний упругих систем, когда затухание колебаний не принимается во внимание. Показывается применение этого исследования для определения амплитуд колебаний сооружения при землетрясениях.

Во второй из исследований [2], сравнительно упрощенным методом, выводится дифференциальные уравнения движения упругого тела, происходящего под действием сейсмической волны, с учетом внутреннего трения упругого тела. В другой работе [3] выведены интегро-дифференциальные уравнения движения упругой среды относительно функции перемещения, в которых учтено взаимодействие между фундаментом сооружения и грунтом при землетрясении. Рассматриваются различные случаи: для малых поперечных размеров фундамента по сравнению с длиной сейсмической волны, а также для случая с широкой опорной базой и низким расположением центра тяжести.

В другой своей работе [4] А.Г.Назаров отмечает, что в наиболее строгой постановке проблема инженерной сейсмологии является проблемой механики твердого деформируемого тела, начиная с процесса возникновения землетрясения в очаге, его распространения, и кончая его воздействием на сооружения. При этом сооружение должно рассматриваться как часть рельефа местности.

В одной работе этого же автора [5], в сильно упрощенном виде, дается расчет сооружения на сейсмостойкость. В этой работе сооружение рассматривается как упругий брус, защемленный в основании, и оценивается период основных свободных колебаний сооружения.

Сейсмические нагрузки на сооружения оцениваются также и в работе [6], в которой также сооружение рассматривается как консольный стержень.

Одной из первых работ, посвященных исследованию колебаний весомого тела, периодически колеблющегося под действием гармонической нагрузки, представляется работа Сана [7]. Здесь весомое тело берется с круглым основанием и лежащим на упругом изотропном полубесконечном грунте.

В упрощенном виде вертикальные, угловые и другие виды колебаний фундаментов рассматривались в работах [8-10].

В работе [8] рассматривается, круглый в плане, фундамент, лежащий на упругом полупространстве без сцепления, который под действием динамической нагрузки совершает горизонтальные, вертикальные и угловые гармонические колебания. В работе [9] горизонтальные, вертикальные и угловые колебания сооружения рассматриваются с допущением, что сооружение имеет вид круглого цилиндра, и что на контактной области на поверхности упругого полупространства, в случае горизонтальных и вертикальных колебаний, контактные напряжения являются постоянными. В работе [10] рассматриваются вертикальные, а также другие формы колебаний фундаментов, лежащих на упругих основаниях без сцепления.

В ряде работ Н.М.Бородачева [11-14] рассматриваются осесимметричные гармонические колебания жесткого, круглого в плане, штампа, лежащего на упругом полупространстве без сцепления. В такой же постановке (при отсутствии сцепления) Н.М.Бородачев рассмотрел также и осесимметричные колебания жесткого штампа с кольцевым основанием [15]. Определяется амплитуда вертикальных колебаний.

Осесимметричные колебания невесомого жесткого круглого штампа, лежащего на изотропном однородном упругом полупространстве, под действием гармонической нагрузки, исследовались в работе [16]. Здесь рассмотрены две задачи: для штампа, лежащего на упругом основании без трения и сцепления, и для штампа при полном его сцеплении. При решении этих задач вводятся интегральные уравнения, решающие задачи, и предлагается прибли-

женный метод для решения этих уравнений.

Вертикальные колебания жесткого круглого штампа, лежащего на упругом полупространстве без сцепления, исследовались также в работах [17-24].

Из упомянутых работ в [18] рассматриваются осесимметричные колебания штампа, лежащего без сцепления на двухслойном упругом основании. Решение задачи сводится к интегральному уравнению первого рода. Исследуются вопросы разрешимости полученного интегрального уравнения. Предлагается для решения этого уравнения приближенный метод, который основан на факторизации функций.

Вертикальные колебания круглых фундаментов, лежащих на поверхности упругого полупространства со сцеплением, исследовались в работе [25].

Две осесимметричные динамические задачи о действии круглого упругого штампа, находящегося на поверхности упругого полупространства, с допущением, что область контактного круга на поверхности полупространства меняется (при сжатии штамп расширяется, при отходе сужается) рассматривались в работе [26].

Осесимметричные колебания круглой упругой плиты, лежащей на упругом полупространстве, рассматривались также в работе [27].

Осесимметричные колебания жесткого штампа на двухслойном упругом полупространстве исследовались в работе [28]. В этой работе при рассмотрении задачи об осесимметричной вибрации заглубленного в верхний упругий слой основания круглого жесткого штампа (при равенстве высоты штампа и толщины слоя) принимается, что заглубление малое, и что касательные напряжения под слоем и штампом отсутствуют. Решение задачи сведено к интегральному уравнению второго рода. Контактные напряжения под штампом определяются с использованием теории вычетов.

В ряде работ В.А.Бабешко [29-32] исследовались интегральные уравнения и системы интегральных уравнений динамических контактных задач теории упругости. В этих, а также и в некоторых других работах этого автора, устанавливаются свойства функций и ядер, входящих в интегральные уравнения, при которых обеспечивается единственность решений рассматриваемых интегральных уравнений и становится возможным построить эти решения приближенными методами. В работе [33] решение задачи о колебаниях круглого штампа сводится к интегральному уравнению первого рода. Вопросы существования и единственности решения этого уравнения были исследованы в вышеупомянутых работах В.А.Бабешко.

В монографии И.И.Воровича и В.А.Бабешко [34] приводятся математический анализ и прикладные методы решения динамических смешанных задач теории упругости. Эти методы могут быть использованы при рассмотрении вибраций деталей машин, фундаментов и оснований. В работе изучается также вопрос разрешимости различных типов интегральных уравнений.

Несимметричные контактные задачи, относящиеся к колебаниям жестких штампов, или фундаментов, установленных на упругих основаниях, привлекают к себе внимание многих исследователей.

В работе [35] исследуется влияние протяженности сооружения в связи с прохождением сейсмической волны через упругое основание сооружения.

В работе [36], при помощи кратных интегралов, получено уравнение для определения податливости грунта (упругого основания под фундаментом) при действии гармонической вертикальной нагрузки. Это уравнение решается численно.

В работах [37-41] рассматривались угловые колебания жестких штампов (сплошного круглого и кольцевого), находящихся на упругом полупространстве без сцепления.

В работах [42-45] исследуются угловые и горизонтальные колебания жесткого штампа, с круговым основанием. В рассмотренных задачах динамические нагрузки берутся приложенными непосредственно к штампам. Задачи о горизонтальных и угловых колебаниях рассматриваются независимо друг от друга. При этом решение задачи об угловых колебаниях штампа строится с допущением, что касательные напряжения на всей поверхности упругого полупространства (в том числе и под штампом) отсутствуют. В задаче же о горизонтальных колебаниях штампа, на всей поверхности упругого полупространства, считаются отсутствующими нормальные напряжения (штамп не находится под нагрузкой, или он невесомый). В работе [44] считается, что фундамент может подвергаться изгибу.

Исследованию горизонтальных и угловых колебаний жестких штампов - фундаментов посвящены также работы [46-52]. В работах [46, 49] решения задач приводятся к интегральным уравнениям второго рода. В работе [50] задача решается непосредственно численным методом. В работе [48] исследование горизонтальных и угловых колебаний рассматриваются в связанном виде. В работе [51] вместе с угловыми колебаниями рассматриваются также и крутильные колебания.

Вибрации скользящих и качающихся фундаментов, и окружающей их почвы, изучались в работе [53].

Горизонтальные и угловые колебания штампов, в условиях плоской задачи теории упругости, различными способами исследовались в многих работах. Такие задачи рассматривались также в монографии В.М. Сеймова [54], в которой содержатся также и исследования некоторых задач о колебаниях жестких штампов на упругом полупространстве.

В работах Э.Е.Хачияна [55-57] исследовались, как влияние протяженности фундамента, так и влияние высоты сооружения. Произведенные расчеты на сейсмостойкость сооружений даются в форме, удобной для применения в инженерной практике.

Динамическая реакция упругого основания от колебаний фундаментов произвольной формы (в том числе и прямоугольных) изучалась в работах [58-63]. В работах [59, 61] указывается, что при рассмотрении контактной задачи фундамента с упругим основанием, для выяснения истинного характера динамической реакции основания, необходимо обязательно учитывать давление фундамента (то есть необходимо принимать во внимание вес фундамента). Авторы работы [59], на частном примере, показали влияние осадки круглого фундамента, в особенности его центральной точки, на реакции упругого основания под фундаментом. По-видимому, в этой работе впервые отмечается, что законы распределения контактных напряжений под фундаментом в динамических задачах оставляют свое влияние реакции упругого основания, и, с этой точки зрения, под фундаментом перемещения должны быть определены прежде, чем выясняется характер динамической реакции упругого основания.

В работах [62, 63] получены интегральные уравнения, которые в дальнейшем решаются численными методами. Здесь исследуется взаимодействие жесткого прямоугольного фундамента с сейсмическими волнами при отсутствии веса фундамента, но с учетом сцепления фундамента с его упругим основанием - полупространством.

Вертикальные и горизонтальные колебания круглых фундаментов рассматривались в работах [64-68].

В работе [69] изучались колебания эллиптических фундаментов.

В работе [70] исследовались вертикальные колебания круглого жесткого фундамента, лежащего на насыщенном жидкостью упругом полупространстве. Решение задачи сведено к интегральному уравнению второго рода. Ди-

намическая задача о колебаниях массивного фундамента, лежащего на анизотропном основании, рассматривалась в работе [71].

Вертикальные колебания кругового штампа, лежащего на упругом полупространстве, имеющего цилиндрическую полость, исследовались в работе [72]. В этой работе использованы теория парных интегральных уравнений и интегральное преобразование Вебера-Орра. В работе приводятся численные результаты.

Вибрации двух круглых штампов разных радиусов на поверхности упругой слоистой среды, когда штампы не касаются друг друга и под штампами отсутствуют касательные напряжения, рассматривались в работе [73].

Вибрации фундаментов исследуются также в работе [74].

Экспериментальные исследования колебаний фундаментов выполнялись в работах [75, 76]. В работе [75] строится функция, связывающая амплитуду гармонической силы, действующей на фундамент, с амплитудой колебаний фундамента.

В работе же [76] исследовались сейсмические колебания твердых тел и фундаментов, вызванных землетрясениями. Определяются амплитуды колебаний фундамента, динамические характеристики упругих оснований фундаментов (коэффициент жесткости, коэффициент демпфирования и другие параметры). В этой работе выяснено, что коэффициент жесткости основания уменьшается при увеличении частоты колебаний.

Зависимость сейсмических параметров от геометрических и физических параметров конструкций исследуется в работе [77].

Амплитуды колебаний упругих тел вычисляются также в работах [78,79].

В работе [80] рассматриваются горизонтальные и угловые гармонические колебания, сцепленного с упругим полупространством, кругового в плане, жесткого весомого фундамента, когда действующая динамическая нагрузка приложена непосредственно к фундаменту. Здесь определение контактных напряжений под фундаментом на поверхности упругого полупространства сводится к решению системы интегральных уравнений второго рода. Выводятся аналитические выражения для определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний фундамента. Эти амплитуды выражаются через геометрические и физические параметры фундамента и его упругого основания, через контактные напряжения, возникшие под фундаментом, а такие через амплитуду, вызывающей колебания гармонической нагрузки и ее частотного параметра.

В работе [81] рассматриваются горизонтальные, вертикальные и угловые гармонические колебания сцепленного с упругим полупространством, кругового в плане, жесткого весомого фундамента, когда действующая гармоническая нагрузка приложена на поверхности упругого полупространства - основания фундамента, на конечном расстоянии от фундамента. Выведены аналитические формулы для определения амплитуд колебаний.

Из полученных в работах [80, 81] результатов, осуществлением предельного перехода, при устремлении частотного параметра к нулю, получены решения соответствующих задач статической теории упругости [80, 82].

Вопросам, связанным с распространением упругих волн в сооружениях, посвящена монография [83].

Отметим еще, что задачи, посвященные колебаниям жестких фундаментов, исследовались также в работах [84-86].

Сопоставляя различные исследования, касающиеся взаимодействия между геометрическими и физическими параметрами сооружений, их жестких фундаментов и упругих оснований с сейсмическими параметрами, можно сделать вывод, что на величины сейсмических параметров важное влияние имеет рас-

положение центра тяжести сооружения и его жесткого фундамента вместе взятых, а также вид сцепления жесткого фундамента к упругому основанию.

Из-за высокого расположения центра тяжести увеличиваются инерционные силы, а также и сейсмические параметры фундамента и сооружения.

С этой точки зрения для понижения величин сейсмических параметров конструкций, подлежащих построению в сейсмически активных районах, следует пользоваться новой архитектурой, в которой, при конструировании зданий, всякими способами необходимо достигнуть низкому расположению центра тяжести всего здания (рекомендуется, например, нижние этажи высотных зданий построить из тяжелых материалов, верхние этажи - из легких).

Для понижения сейсмических параметров необходимо также правильно определить осадку центральной точки жесткого фундамента здания, зависящие от этой осадки, контактные напряжения под фундаментом.

Для выяснения наилучшего способа установления жесткого фундамента на упругом неоднородном основании (полное сцепление, мягкое сцепление, допускающее частичное скольжение фундамента на упругом основании; сцепление слоистого фундамента, составленного из двух жестких фундаментов с упругим тонким слоем между ними), по-видимому, следует провести дополнительные исследования с рассмотрением новых задач о колебаниях фундаментов, различным образом составленных и различным образом установленных на упругом основании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.* Theory of Vibration of Buildings During Earthquake. ZAMM, Bd. 14, 1934, heft 4, 213-223; See also: "Theory of Elastic Systems Vibrating under Transient Impulse with an Application to Earthquake-proof Buildings. Proc. Nat. Acad. Sci. v. 19, febr. 1933, No. 2, p. 262-268.
2. *Назаров А.Г.* Теория колебаний с учетом внутреннего трения в применении к сейсмостойкости сооружения.- Тр. Тбилисского геофизического института Грузинского филиала АН СССР, 1937, т. 2, с. 1-21.
3. *Назаров А.Г.* О взаимодействии между фундаментом сооружения и основанием при землетрясении.- Тр. Тбилисского геофизического института, т. 4, 1939, с. 35-63.
4. *Назаров А.Г.* К проблеме исследований по инженерной сейсмологии.- ДАН Арм. ССР, 1975, т. 60, № 2, с. 94-99.
5. *Назаров А.Г.* Упрощенный способ расчета сооружений на сейсмостойкость.- Изв. АН Арм. ССР, сер. тех. наук, 1956, т. 9, № 10, с. 55-63.
6. *Лейдерман Ю.Р.* Об оценках сейсмических нагрузок, действующих на сооружение.- Изв. АН Узб. ССР, сер. техн. наук, 1958, № 4, с. 31-39.
7. *Sung T.Y.* Vibration in Semi-infinite Solids Due to Periodic Loading.- Harvard univ., Soil Mech., ser. 48, 1955 (Reprint: Amer. Society for Testing Materials, Spec. Techn., 1953, No. 156, 35-68.
8. *Bycroft G.M.* Forced Vibrations of a Rigid Circular Footing on a Semi-infinite Elastic Space, and on an Elastic Stratum.- Philosophical Transactions of the Roy. Soc. of London, v. 248, ser. A, jan. 1956, No. 948, p. 327-368.
9. *Sato Y., Yamaguchi R.* Vibration of Buildings in the Elastic Foundation.- Bull. Earthquake Res. Inst. univ. Tokyo, v. 35, 1957, No. 3, p. 545-565.
10. *Toriumi I.* Vibration in Foundations of Machines, Technical Repts, Osaka univ., v. 5, march 1955, No. 146, 103-126.
11. *Бородачев Н.М.* О решении динамической контактной задачи для полупространства в случае осевой симметрии.- Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1960, № 4, с. 141-144.

12. *Бородачев Н.М.* Динамическая контактная задача для штампа с плоским круглым основанием, лежащего на упругом полупространстве. - Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1964, № 2, с.82-90.
13. *Бородачев Н.М.* Вертикальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве. - Строительная механика и расчет сооружений. М., 1964, № 5, 33-35.
14. *Бородачев Н.М.* Определение динамических напряжений в упругом полупространстве под штампом с плоским круглым основанием.- Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4, с.158-160.
15. *Бородачев Н.М.* Динамическая контактная задача для штампа с плоским кольцевым основанием, расположенного на упругом полупространстве.- Сб. "Прочность и пластичность", Изд. "Наука", М., 1971, с.298-302.
16. *Закорко В.Н., Ростовцев Н.А.* К динамической контактной задаче стационарных колебаний упругого полупространства.- ПММ, 1965, т.29, вып.3, с.545-552.
17. *Аводжоби.* Приближенное решение задачи о колебаниях жестких тел на упругих основаниях при больших значениях коэффициента частот.- Прикл. механика (Тр. Американск. Общ. инженеров-механиков, сер.Е- русский перевод), 1971, т.38, № 1, с.110-116.
18. *Бабешко В.А., Ворович И.И., Селезнов М.Г.* Вибрация штампа на двухслойном основании.- ПММ, 1977, т.41, вып.1, с.166-172.
19. *Лобысев В.Л., Яковлев Ю.С.* Осесимметричная динамическая задача теории упругости со смешанными граничными условиями.- Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 4, с.103-108.
20. *Поручиков В.Б.* Осесимметричная динамическая задача о штампе на упругом полупространстве.- Вестник МГУ, 1966, № 6, с.114-120.
21. *Awojobi A.O.* Vibration of Rigid Bodies on Non-homogeneous Semi-infinite Elastic Media.-Quart. Journ. of Mechanics and Appl. Mathematics, v.26, nov. 1973, part 4, p.483-498.
22. *Awojobi A.O., Grootenhuis P.* Vibration of Rigid Bodies on Semi-infinite Elastic Media.- Proc. of Roy. Soc. London, v.287, 1965, № 1408, p.27-63.
23. *De T.K.* Dynamic Contact Problem of Steady Periodic Vibrations on an Elastic Half-space.- ZAAAM, Bd. 52, heft 11, 1972, 549-551.
24. *Robertson I.A.* Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-infinite Elastic Solid.- Proc. Camb. Philos. Soc., 1966, v.62, No.3, p.547-553.
25. *Novak M., Beredugo Y.O.* Vertical Vibrations of Embedded Footings. Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Division.- Proc. of the Amer. Soc. of Civil Engineers, v.98, dec. 1972, SM.12, p.1291-1310.
26. *Brock L.M.* Wave Propagation in an Elastic Half-space Due to Surface Pressure over a Non-uniformly Changing Circular Sone.- Quart. Appl. Math., v.38, 1980, No.1, p.37-49.
27. *Krenk S., Schmidt H.* Vibration of an Elastic Circular Plate on an Elastic Half Space. A direct approach.- Journ. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser.E), v.48, 1981, No.1, p. 161-168.
28. *Бабешко В.А., Золотарева Л.И.* Осесимметричная задача о вибрации заглубленного в грунте штампа. Проблемы вибросейсмических методов исследования.- Сб. научн. работ под ред. А.С. Алексеева и А.Т.Горбачева, Новосибирск, 1979, с.7-17.
29. *Бабешко В.А.* Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики.- ПММ, 1969, т.33, вып. 1, с.52-60.
30. *Бабешко В.А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач.- ДАН СССР, 1973, т.210, № 6, с.1310-1313.

31. *Бабешко В.А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач.- ДАН СССР, 1975, т.220, № 6, с. 1293 - 1296.
32. *Бабешко В.А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. - ДАН СССР, 1974, т. 217, №4, с. 777 - 780.
33. *Бабешко В.А., Прягина О.Д.* Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов.- Изв. АН СССР. МТТ. 1981, № 2, с.22-28.
34. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.- М.: Наука, 1979, 320 с.
35. *Синицын А.П.* Влияние бегущей сейсмической волны на массивные сооружения.- Тр. института физики Земли АН СССР, 1961, № 17, с.87-99.
36. *Томсон, Кобори.* Динамическая податливость прямоугольного фундамента на упругом полупространстве.-ПМ (Тр. Американ. Общ. инж. механиков, сер. Е- русский перевод), 1963, т.30, 4, с.116-121.
37. *Буряков А.Н.* Динамическая контактная задача об угловых колебаниях кольцевого штампа, расположенного на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1970, № 6, с.40-47.
38. *Буряков А.Н.* Горизонтальные колебания штампа с плоским кольцевым основанием, расположенного на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1971, № 12, с.51-59.
39. *Муравский Г.Б.* О гармонических колебаниях штампа на упругом изотропном полупространстве.- Строительная механика и расчет сооружений, М., 1969, № 4, с.39-43.
40. *Муравский Г.Б.* Гармонические колебания штампа на упругом полупространстве при действии силы, приложенной к поверхности полупространства.- Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 6, с. 134-139.
41. *Сигалов Л.С.* Изгибные колебания штампа с плоским круглым основанием на упругом полупространстве.- Изв. высш. учебн. заведений, "Строительство и Архитектура", Новосибирск, 1966, № 6, с.25-33.
42. *Gladwell G.M.L.* Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid.-Intern. Journ. of Engin. Sci., v.6, 1968, No.10, p.591-607.
43. *Parmelee R.A.* Building-foundation interaction effects.-Journ. of the Engin. Mech. division (Proc. of ASCE), v.93, 1963, EM, 2, p.131 - 152.
44. *Parmelee R.A., Perelman D.C., Lee S.L.* Seismic Response of Multiple - Story Structures on Flexible Foundations. Bull.-Seism. Soc. of Amer., v.59, 1969, p.1061-1070.
45. *Parmelee R.A., Perelman D.C., Lee S.L., Keer L.M.* Seismic Response of Structure-foundation Systems.- Journ. Engin. Mech. Division (Proc.of ASCE), v.94, dec. 1968, EM,6, 1295-1315.
46. *Луко, Вестман.* Динамика жесткого фундамента, соединенного с упругим полупространством.- ПМ (Тр. Американ. Общ. инж. механиков, сер. Е - русский перевод), т.39, 1972, № 2, с.211-219.
47. *Beredugo Y.O.* Modal Analysis of Coupled Motion of Horizontally Excited Embedded Footings.- Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v.4, apr./june 1976, No.4, p.403-410.
48. *Beredugo Y.O., Novak M.* Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings.- Canadian Geotechnical; Journ. v.9, 1972, p.477-497.
49. *Luco J.E., Westmann R.A.* Dinamic Response of Circular Footings.- Journ. Engin. Mech. Division (Proc. ASCE), v.97, oct. 1971, p.1371-1395.
50. *Luco J.E., Wong H.L., Trifunac M.D.* A Note on the Dynamic Response of

Rigid Embedded Foundations.- Earthquake Engin. and Structural Dynamics, v.4, oct./dec. 1975, No.2, p.119-127.

51. *Novak M., Sachs K.* Torsional and Coupled Vibrations of Embedded Footings.-Intern. Journ. Earthquake Engin. and Structural Dynamics, v.2, 1973, p.11-33.
52. *Veletsos A.E., Wei Y.T.* Lateral and Rocking Vibrations of Footings.-Journ. of Soil Mech. Found. Division (Proc.ASCE) v.97, 1971, p.1227-1248.
53. *Krizek R.T., Gupta D.C., Parmelee R.A.* Coupled Sliding and Roking of Embedded Foundations.- Journ. of the Soil Mechanics and Found. Division (Proc.ASCE), dec. 1972, v. 98, SM.12, p.1347-1357.
54. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 283 с.
55. *Хачиян Э.Е.* К исследованию сейсмического воздействия на сооружения с учетом протяженности.-ДАН Арм.ССР, 1975, т.60, № 3, с.171-177.
56. *Khachian E.E.* Seismic influence on stratum accounting the eliminated links and local damages.- Proc. of the third European symposium on earthquake Engineering, Sofia, 1971, p.573-581.
57. *Khachian E.E.* A Study of Seismic Influences on Structures Considering Their Lenght and Height.- In: Preprints of the sixth world conference on Earthquake Engin. New-Dehli, 1977, p.317-322.
58. *Chase Y.S., Hall J.R.Jr., Richart F.E.Jr.* Dynamic Pressure Distribution Beneath a Ring Footing.- Proc.sixth International conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Montreal, Canada, 1965, v.2, 3/5, p.22-26.
59. *Housner G.W., Castellani A.* Discussion of "Comparison of Footing Vibration with Theory",- Journ. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v.95, 1969, No.SM.1, p.360-364.
60. *Lysmer J., Richart F.E.Jr.* Dynamic Response of Footing to Vertical Loading.- Journ. of Soil Mechanics and Foundations Divisions, ASCE, 1966, v.92, No.SM.1, p.65-91.
61. *Richart F.E.Jr., Whitman R.V.* Comparisson of Footing Vibration with Theory.- Journ. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1967, v.93, No.SM.6, p.143-168.
62. *Wong H.L., Luco J.E.* Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape.- Earthquake Engin. and Structural Dynamics, oct./dec.1976, v.4, No.6, p.579-587.
63. *Wong H.L., Luco J.E.* Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves.- Earthquake Engin. and Struct. dynamics, v.6, jan./febr. 1978, No.1, p.3-16.
64. *Balendra J.* Free Vibration of a Shear Wall-frame Building on an Elastic Foundation.- Journ. Sound Vibration, v.96, oct.1984, № 4, p.537-546.
65. *Hall J.R.Jr.* Coupled Rocking Arid Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings.- Proc. of Intern. Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth materials, 1967, p.139-148.
66. *Nagendra M.V., Sridharan A.* Response at Circular Footings to Vertical Vibration.- Journ. of the Geotechn. Engin. Division, Proc. of ASCE, v.107, july 1981, Gt.7, technical notes, p.989-995.
67. *Nagendra M.V., Sridharan A., et al.* Foundation Response to Horizontal Vibration.- Indian Geotechn. Journ., v.12, apr.1982, No.2, p.132-151.
68. *Sankaran K.S., Subrahmanyam M.S., Sostry K.R.* Horizontal Vibration - New Lumped Parameter Model. Proc. of 9-th Intern. conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, v.2, 1977, 4/35, 365-368.
69. *Arabinde R.* Dynamic Response of Elliptical footings. Intern. Journ. of Solids

- and Structures, v.22, 1986, No.3, 293-306.
70. *Kassir M.K., Bandyopadhyay K.K., Xu J.* Vertical Vibration of Circular Footing on a Saturated Half-space. Intern. Journ. of Engin. Sci., v.27, 1989, No.4, 353-361.
 71. *Молев М.О.* О расчете массивных фундаментов на анизотропных основаниях, находящихся под действием динамической нагрузки.- Изв. высш. учебн. заведений "Строительство и Архитектура", Новосибирск, № 6, 1987, с. 34-37.
 72. *Малиц П.Я., Сницер А.Р.* Вертикальные колебания кругового штампа на упругом полупространстве с цилиндрической полостью. Динамические системы.- Сб. науч. работ, Киев, № 8, 1989, с. 30-36.
 73. *Бабешко В.А.* Вибрация двух круглых штампов на слоистой среде.- ПММ, 1976, т.40, вып.6, с. 1104-1112.
 74. *Hsieh T.K.* Foundation Vibrations. Proceed. of the Institution of Civil Engineers, London, v.22, 1962, June, 211-226.
 75. *Ильичев В.А., Таранов В.Г.* Экспериментальное изучение взаимодействия вертикально колеблющегося фундамента и его основания.- Основания, фундаменты и механика грунтов, 1976, № 2, с.9-13.
 76. *Ho, Michael M.K., Burwash W.T.* Vertical Vibrations of a Rigid Foundation, Resting on Sand. Vibration Effects of Earthquakes on Solids and Foundations. American Society of Testing and Materials, 1969, 197-232.
 77. *Done G.T.S., Hughes A.D.* The Response of a Vibrating Structure as a Function of Structural Parameters. Journ. of Sound and Vibrations, v.38, Jan. 1975, No.2, 255-266.
 78. *Moore P.J.* Calculated and Observed Vibration Amplitudes. Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v.97, 1971, No.SM.1, 141-148.
 79. *Wiggins R.A.* Body Wave Amplitude Calculation. II. Geophysical Journ. of the Roy. Astron. Soc. (United Kingdom), v.46, 1976, 1-10.
 80. *Абрамян Б.Л., Гаспарян А.В.* Об одном методе определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний жесткого весомого фундамента, лежащего на упругом однородном полупространстве со сцеплением.- Изв. НАН Армении, Механика, 1994, т.47, № 3-4, с. 10 - 22.
 81. *Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В.* О взаимной связи геометрических и физических параметров колеблющихся жестких фундаментов и их упругих оснований с сейсмическими параметрами.- Докл. НАН Армении. 1995, т. 95, № 4.
 82. *Абрамян Б.Л., Саакян А.В., Гаспарян А.В.* О действии на весомый фундамент нормальной сосредоточенной силы, приложенной на конечном расстоянии от фундамента.- Докл. НАН Армении. 1996, т. 96, № 1.
 83. *Doyle J.F.* Wave propagation in structures. Springer-Verlag, 1989, 258 p.
 84. *Абрамян Б.Л., Енгибарян С.А., Саакян А.В.* Несимметричные колебания жесткого круглого фундамента, лежащего на упругом полупространстве со сцеплением.- Докл. расширенных заседаний семинара института прикладной математики им.И.Н.Векуа, Тбилиси, 1989, т.4, № 2, 9-11.
 85. *Овсепян В.В.* О колебаниях упругого полупространства со сцепленным с ним жестким весомым фундаментом. "Механика деформируемого твердого тела", Сб. научн. тр. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1990, 257-264.
 86. *Salmon M.A., Thou S.A., Huang W.* Wave Diffraction, by Rigid Foundation. Journ. of Engin. Mech. Division, Proc. of ASCE, v.99, 1973, 902-906.