ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 4, 1995 Механика

РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРА ИМЕЮЩЕГО СОБСТВЕННЫЙ ВЕС

Макарян В. С.

Մակարյան Վ. Ս.

Սեփական կշիռ ունեցող գլանի հավասարակշռությունը

Աշխատանքում լուծված է եզրերում ամրակցված կլոր գլանի ոչ առանցքասիմետրիկ խնդիրը սեփական կշռի հաշվառմամբ:

Անհայտ ֆունկցիաները ներկայացնելով Բեսելի առաջին սեռի ֆունկցիաների շարքի տեսքով, համապատասխան ձևով ընտրելով սեփական արժեքները, հնարավոր է լինում խնդիրը բերել լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի:

MAKARIAN V.S.

Equilibrium of Cylinder Having Dead Weight

В работе решена задача для круглого цилиндра защемленного по торцам, с учетом собственного веса. Основываясь на разложении искомых функций по функциям Бесселя первого рода, надлежащим выбором собственных чисел удается свести задачу к вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Задачи для цилиндра рассматривались в работах [1-7].

Цилиндр имеющий собственный вес, действующий вертикально, расположен так, что ось цилиндра направлена горизонтально, защемлен по торцам. Задача является неосесимметричной, поэтому необходимо построить решение основываясь на общих уравнениях теории упругости в цилиндрических координатах.

1. Построение общего решения. В цилиндрических координатах перемещения представляются в виде

$$u_r(r,z,\varphi)=u(r,z)\cos\varphi,\ u_z(r,z,\varphi)=w(r,z)\cos\varphi,\ u_\varphi(r,z,\varphi)=v(r,z)\sin\varphi$$

то есть из общего решения пространственной задачи берем только первую гармонику.

Функции u, v, w удовлетворяют неоднородным уравнениям с учетом массовых сил

$$\Delta u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r}-\frac{u+2v}{r^2}+\frac{\rho g}{G}=0$$

$$\Delta v-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\theta}{r}-\frac{2v+v}{r}-\frac{\rho g}{G}=0 \qquad (1)$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u+v}{r} + \frac{\partial w}{\partial z},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \tag{2}$$

Учитывая, что напряжения содержат координату φ только в виде множителя через тригонометрические функции, введем новые неизестные безразмерные функции не зависящие от координаты φ

$$\frac{\sigma_r(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi} \equiv \sigma_r(r,z) = \frac{\partial u}{\partial r} + m\theta; \qquad \frac{\tau_{rz}(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi} \equiv \tau_{rz}(r,z) = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{\sigma_z(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi} \equiv \sigma_z(r,z) = \frac{\partial w}{\partial z} + m\theta; \qquad \frac{\tau_{\varphi z}(r,z,\varphi)}{2G\sin\varphi} \equiv \tau_{\varphi z}(r,z) = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{w}{r};$$

$$\frac{\sigma_\varphi(r,z,\varphi)}{2G\cos\varphi} \equiv \sigma_\varphi(r,z) = \frac{u+v}{r} + m\theta; \quad \frac{\tau_{r\varphi}(r,z,\varphi)}{2G\sin\varphi} \equiv \tau_{r\varphi}(r,z) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u+v}{r}. \tag{3}$$

В (1)-(3) ν-коэффициент Пуассона, G- модуль сдвига, а параметр m зависит от ν

$$m = \frac{\nu}{1-2\nu} \tag{4}$$

Общее решение неоднородных уравнений (1) представим в виде:

$$u(r,z) = u_0(r,z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{1k}(r)\sin\lambda_k z + \sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{1p}(z)J_1'(\alpha_p r) + f_{3p}(z)\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r}\right]$$

$$v(r,z) = v_0(r,z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{2k}(r)\sin\lambda_k z - \sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{3p}(z)J_1'(\alpha_p r) + f_{3p}(z)\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r}\right] \tag{5}$$

$$w(r,z) = w_0(r,z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_{3k}(r)\cos\lambda_k z + \sum_{p=1}^{\infty} f_{2p}(z)J_1(\alpha_p r)$$

Для краткости записи обозначим $\xi = \lambda_k r;\ \eta = \alpha_p z$

Тогда

$$R_{1k}(r) = Q_k\left[(5-4\nu)I_2(\xi) - \xi I_1(\xi)\right] + M_k I_0(\xi) + N_k I_2(\xi)$$

$$R_{2k}(r) = Q_k(5-4\nu)I_2(\xi) - M_k I_0(\xi) + N_k I_2(\xi)$$

$$R_{3k}(r) = -Q_k\xi I_2(\xi) + (M_k + N_k) I_1(\xi),\ f_{3p}(z) = E_p \operatorname{sh}\eta + F_p \operatorname{ch}\eta$$

$$f_{1p}(z) = \left(A_p + \eta B_p\right)\operatorname{ch}\eta + \left(C_p + \eta D_p\right)\operatorname{sh}\eta \qquad (6)$$

$$f_{2p}(z) = \left[A_p + \eta B_p - (3-4\nu)D_p\right]\operatorname{sh}\eta + \left[C_p + \eta D_p - (3-4\nu)B_p\right]\operatorname{ch}\eta$$

Частное решение u_0, v_0, w_0 представляется в виде

$$u_0(r,z) = A_{10}r^2 + B_0 z^2 + D_0(1-4\nu)r^2 z + E_0 z + G_0$$

$$v_0(r,z) = A_{20}r^2 - B_0 z^2 + D_0(5-4\nu)r^2 z - E_0 z - G_0 \qquad (7)$$

$$w_0(r,z) = C_0 rz - D_0 r^3 + F_0 r$$

$$3A_{10} + A_{20} + 2(1-2\nu)\left(A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) = 0$$

Напряжения представляются формулами

$$\tau_{r\varphi}(r,z) = r\left(A_{20} - A_{10}\right) + 4D_0 rz + \sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{2k}'(r) - \frac{R_{1k}(r) + R_{2k}(r)}{r}\right]\sin\lambda_k z +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{2\left[f_{1p}(z) - f_{3p}(z)\right]\frac{J_2(\alpha_p r)}{r} + \alpha_p f_{3p}(z) J_1(\alpha_p r)\right\}$$

$$\tau_{\varphi z}(r,z) = 2(3-2\nu)D_0 r^2 - \left(2B_0 + C_0\right)z - E_0 - F_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\lambda_k R_{2k}(r) - \frac{R_{3k}(r)}{r}\right]\cos\lambda_k z -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}'(z) + \alpha_p f_{2p}(z) + f_{3p}'(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p r} - f_{3p}'(z) J_2(\alpha_p r)\right\}$$

$$\tau_{rz}(r,z) = z\left(2B_0 + C_0\right) - 2(1+2\nu)D_0 r^2 + E_0 + F_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{3k}'(r) - \lambda_k R_{1k}(r)\right]\cos\lambda_k z +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}'(z)+\alpha_p f_{2p}(z)+f_{3p}'(z)\right]J_1'(\alpha_p r)+f_{3p}'(z)J_2(\alpha_p r)\right\}$$

$$\sigma_r(r,z)=2rA_{10}+2D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]+ \tag{8}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{1k}'(r)+2\nu\lambda_k Q_k I_1(\lambda_k r)\right]\sin\lambda_k z+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}(z)-f_{3p}(z)\right]\frac{J_2(\alpha_p r)}{r}-\left[f_{1p}(z)+2\nu\alpha_p\left(B_p sh\alpha_p z+D_p ch\alpha_p z\right)J_1(\alpha_p r)\right]\right\}$$

$$\sigma_z(r,z)=rC_0+8\nu D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[R_{3k}(r)-2\nu Q_k I_1(\lambda_k r)\right]\lambda_k\sin\lambda_k z+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\left[f_{2p}'(z)-2\nu\alpha_p\left(B_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p z+D_p\,\mathrm{ch}\,\alpha_p z\right)\right]J_1(\alpha_p r),$$

$$\sigma_\varphi(r,z)=r\left(A_{10}+A_{20}\right)+2(3+2\nu)D_0rz-2r\nu\left[A_{10}-A_{20}+B_0+\frac{\rho g}{2G}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{R_{1k}(r)+R_{2k}(r)}{\lambda_k r}+2\nu Q_k I_1(\lambda_k r)\right]\lambda_k\sin\lambda_k z-$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[f_{1p}(z)-f_{3p}(z)\right]\frac{J_2(\alpha_p r)}{r}+2\nu\alpha_p\left(B_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p z+D_p\,\mathrm{ch}\,\alpha_p z\right)J_1(\alpha_p r)\right\}$$

2. Сведение задачи к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

Граничные условия для рассматриваемого случая следующие:

$$u(r,0)=-v(r,0)=\delta_1,\quad u(r,l)=-v(r,l)=\delta_2$$

$$w(r,0)=\chi_1 r,\quad w(r,l)=\chi_2 r, \tag{9}$$

$$\sigma_r(R,z)=\sigma(z),\quad \tau_{r\varphi}(R,z)=-\tau(z),\quad \tau_{rz}(R,z)=0$$

Решение задачи, то есть выражения для перемещений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, следующие:

$$u(r,z)=u_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{1k}-G_{1k}(r)\right]\frac{\sin\lambda_k z}{\lambda_k}-$$

$$-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{1p}(z)+Y_p h_{2p}(z)\right]\frac{J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)}$$

$$\mathrm{v}(r,z)=\mathrm{v}_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{2k}+G_{2k}(r)\right]\frac{\sin\lambda_k z}{\lambda_k}+$$

$$+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{1p}(z)+Y_p h_{2p}(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 r J_1(\alpha_p R)}-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1'(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)} \tag{10}$$

$$w(r,z)=w_0(r,z)+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k g_{3k}-G_{3k}(r)\right]\frac{\cos\lambda_k z}{\lambda_k}+$$

$$+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p h_{3p}(z)+Y_p h_{4p}(z)\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)},\qquad \lambda_k=\frac{k\pi}{l},\quad l=2a$$

Здесь введены обозначения

$$g_{1k}(r)=\left[5-2\nu+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2(x)}-\frac{\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)}+$$

$$+\left[4-2\nu-\frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)}+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)}$$

$$g_{2k}(r)=\left[\frac{2-4\nu}{x}+\frac{I_1}{I_2}\right]\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2'}-\left[4-2\nu-\frac{4(1-\nu)I_2}{xI_2'(x)}+\frac{xI_3}{I_2(x)}\right]\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2(x)}=$$

$$=\frac{8\nu r}{\lambda_k R^2}+\frac{4\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}\cdot\frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)},$$

$$g_{3k}(r)=\frac{xI_3I_1(\lambda_k r)}{I_2^2}-\lambda_k r\frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2}+\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2}=$$

$$g_{4k}(r)=\frac{2I_1(\lambda_k r)}{I_2 I_2'}\left[I_1'-\frac{2\nu}{\lambda_k}I_2\right]-\frac{2I_3(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[\frac{2(1-\nu)}{I_2'}I_1+\frac{x}{I_2}I_1\right]$$

$$g_{5k}(r)=\frac{2I_1'(\lambda_k r)}{I_2}\left[3+\frac{x}{I_2}I_3\right]-\frac{2\lambda_k r I_1(\lambda_k r)}{I_2}-\frac{2I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[1+\frac{2(1-\nu)}{xI_2'}I_2\right]$$

$$g_{6k}(r)=\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2}\left[5+\frac{x}{I_2}I_3\right]-\frac{\lambda_k r I_0(\lambda_k r)}{I_2}-\frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}\left[6-2\nu+\frac{xI_3}{I_2}+\frac{4(1-\nu)}{xI_2'}I_2\right]$$

$$h_{0p}(z)=\frac{E_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p(l-z)+F_p\,\mathrm{sh}\,\alpha_p z}{\mathrm{sh}\,\alpha_p l}$$

$$h_{1p}(z)=\frac{4\alpha_p^2}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\lambda_k\sin\lambda_k z}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}=\frac{\alpha_p a\,\mathrm{ch}\alpha_p(a-z)\,\mathrm{th}\alpha_p a-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{sh}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{ch}\alpha_p a}$$

$$h_{2p}(z)=\frac{4\alpha_p^2}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\lambda_k\sin\lambda_k z}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}=\frac{\alpha_p a\,\mathrm{sh}\alpha_p(a-z)\,\mathrm{cth}\alpha_p a-\alpha_p(a-z)\,\mathrm{ch}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{sh}\alpha_p a}$$

$$h_{3p}(z)=\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\alpha_p^2+(1-2\nu)\lambda_k^2}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z=$$

$$=\left[3-4\nu+\alpha_p a\,\mathrm{th}\alpha_p a\right]\frac{\mathrm{sh}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{ch}\alpha_p a}-\frac{\alpha_p(a-z)\,\mathrm{ch}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{ch}\alpha_p a}$$

$$h_{4p}(z)=\frac{4\alpha_p}{l}\left[\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{2(1-\nu)\alpha_p^2+(1-2\nu)\lambda_k^2}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z+\frac{1-\nu}{\alpha_p^2}\right]=$$

$$=\left[3-4\nu+\alpha_p a\,\mathrm{cth}\alpha_p a\right]\frac{\mathrm{ch}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{sh}\alpha_p a}-\frac{\alpha_p(a-z)\,\mathrm{sh}\alpha_p(a-z)}{2\,\mathrm{sh}\alpha_p a}$$

$$h_{5p}(z)=h_{1p}(z)-\nu\frac{\mathrm{ch}\alpha_p(a-z)}{\mathrm{ch}\alpha_p a}=\frac{4}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\lambda_k\sin\lambda_k z=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\operatorname{th}\alpha_p a-2\nu\right)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)\right]$$

$$h_{6p}(z)=h_{2p}(z)-\nu\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{sh}\alpha_p a}=\frac{4}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\lambda_k\sin\lambda_k z=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\operatorname{cth}\alpha_p a-2\nu\right)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)\right] \quad (11)$$

$$-h_{7p}(z)=\frac{h_{1p}'(z)}{\alpha_p}-h_{3p}(z)=-\frac{8\alpha_p 4}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z=$$

$$=-\frac{1}{ch\alpha_p a}\left[\left(\alpha_p a\operatorname{th}\alpha_p a+1-2\nu\right)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)\right]$$

$$-h_{8p}(z)=\frac{h_{2p}'(z)}{\alpha_p}-h_{4p}(z)=-\frac{8\alpha_p}{l}\left[\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\frac{\left[(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2\right]}{\left(\lambda_k^2+\alpha_p^2\right)^2}\cos\lambda_k z+\frac{1-\nu}{2\alpha_p^2}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_p a}\left[\left(1-\alpha_p a\operatorname{cth}\alpha_p a-2\nu\right)\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)-\alpha_p(a-z)\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)\right]$$

$$G_{1k}(r)=P_k\left[\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2(x)}-\frac{2I_1(\lambda_k r)}{x\lambda_k r I_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2'\lambda_k r}$$

$$G_{2k}(r)=P_k\left[\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}-\frac{2I_1'(\lambda_k r)}{xI_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2'}$$

$$G_{3k}(r)=P_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{I_2(x)}=P_k\left[\frac{2\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_p r)}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)J_1(\alpha_p R)}+\frac{4r}{\lambda_k R^2}\right]$$

$$G_{4k}(r)=2P_k\left[\frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2}-\frac{I_1'(\lambda_k r)}{xI_2'(x)}\right]-Q_k\frac{I_2'(\lambda_k r)}{I_2'}$$

$$G_{5k}(r) = 2P_k\left[\frac{I_1'(\lambda_k r)}{I_2} - \frac{I_1(\lambda_k r)}{x\lambda_k r I_2'(x)}\right] - Q_k\frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r I_2'}, \qquad x = \lambda_k R$$

Частное решение в данном случае удобно представить в виде

$$u_0(r,z) = \frac{\delta_1(l-z)}{l} + \frac{\delta_2 z}{l} + A_{10}r^2 - B_0 z(l-z) + D_0(1-4\nu)r^2 z + E_0 z + G_0$$

$$v_0(r,z) = -\frac{\delta_1(l-z)}{l} - \frac{\delta_2 z}{l} + A_{20}r^2 + B_0 z(l-z) + D_0(5-4\nu)r^2 z - E_0 z - G_0 \quad (12)$$

$$w_0(r,z) = C_0 rz - D_0 r^3 + F_0 r$$

$$3A_{10} + A_{20} + C_0 + 2(1-2\nu)\left(A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) = 0$$

Для объемного расширения из (3) получим

$$-\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\left[X_p\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch}\alpha_p a} + Y_p\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{sh}\alpha_p a}\right]\frac{J_1(\alpha_p r)}{J_1(\alpha_p R)} \quad (13)$$

$$\theta_0 = A_{10} - A_{20} + B_0 + \frac{\rho g}{2G} = -\frac{3A_{10} + A_{20} + C_0}{2(1-2\nu)}$$

где α_p корни уравнения $J_2(\alpha_p R) = 0$.

Такой выбор α_p обеспечивает удовлетворение граничных условий с минимальным числом бесконечных уравнений. При этом ортогональными являются не только $J_2(x)$, но и $J_1(x)$. Причем [8]

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_2(\alpha_k r) = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_1(\alpha_k r)$$

$$a_k\Omega_k = \int_0^R r f(r) J_2(\alpha_k r)dr, \quad \Omega_k = \frac{R^2}{2}J_1^2(\alpha_k R) \quad (14)$$

$$b_k\Omega_k = \int_0^R r f(r) J_1(\alpha_k r)dr, \quad b_0 = \frac{4}{R^4}\int_0^R r^2 f(r)dr$$

Удовлетворяя граничным условиям, для определения неизвестных постоянных получим следующие соотношения:

1) Из условий на нормальные перемещения

$$X_p\left(3-4\nu-\frac{\alpha_p l}{sh\alpha_p l}\right)th\alpha_p a+\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\left[2V_k\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}-\frac{P_k}{\alpha_p^2+\lambda_k^2}\right]=0 \quad (15)$$

$$Y_p\left(3-4\nu+\frac{\alpha_p l}{\text{sh}\alpha_p l}\right)\text{cth}\alpha_p a+\frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\left[2V_k\frac{\nu\lambda_k^2-(1-\nu)\alpha_p^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}-\frac{P_k}{\alpha_p^2+\lambda_k^2}\right]=\frac{4D_0R^2}{\alpha_p}$$

$$\frac{8}{lR^2}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2\nu V_k-P_k}{\lambda_k^2}=\frac{\chi_1-\chi_2}{2}+\frac{1}{2}C_0 l$$

$$\frac{8}{lR^2}\sum_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{2\nu V_k-P_k}{\lambda_k^2}=\frac{\chi_1+\chi_2}{2}-F_0-\frac{1}{2}C_0 l+\frac{2D_0R^2}{3}$$

2) Из условий на радиальные и тангенциальные перемещения (при $z=0$ и $z=l$) получим

$$r^2\left[A_{10}+A_{20}+2D_0z(3-4\nu)\right]+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_2(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}=0$$

$$r^2\left[A_{10}+D_0z(1-4\nu)\right]+E_0z+G_0+\frac{2}{R^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_1(\alpha_p r)}{\alpha_p^2 J_1(\alpha_p R)}=0 \quad (16)$$

На основе ортогональности функций $J_2(x)$ и $J_1(x)$ получим

$$h_{0p}(z)=R^2\left[A_{10}+A_{20}+2D_0z(3-4\nu)\right] \qquad (z=0;l)$$

$$h_{0p}(z)=-\frac{R^2}{2}\left[A_{10}-A_{20}-4D_0z\right],$$

$$\left(A_{10}-A_{20}-4D_0z\right)\frac{R^2}{3}+2E_0z+2G_0=0 \quad (17)$$

$$\left[A_{10}+D_0z(1-4\nu)\right]\frac{2R^2}{3}+E_0z+G_0=0 \quad (18)$$

Из этих всех соотношений следует окончательно, что

$3A_{10}+A_{20}=0,\ D_0=0,\ E_0=0,$

$$G_0=-\frac{2R^2}{3}A_{10},\ h_{0p}(0)=h_{0p}(0)=-2R^2A_{10} \tag{19}$$

Отсюда для функции $h_{0p}(z)$ получим

$$h_{op}(z)=-2R^2A_{10}\frac{\operatorname{sh}\alpha_p(l-z)+\operatorname{sh}\alpha_p z}{\operatorname{sh}\alpha_p l}=$$

$$=-2R^2A_{10}\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\operatorname{ch}\alpha_p a}=-\frac{4R^2A_{10}}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\lambda_k\sin\lambda_k z\right]}{\lambda_k^2+\alpha_p^2} \tag{20}$$

3) Из условия на $\tau_{rp}(R,z)=-2\tau(z)$

$$-4RA_{10}-\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\sin\lambda_k z+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}h_{0p}(z)=-2\tau(z) \tag{21}$$

после интегрирования и суммирования полученного ряда, для Q_k получим

$$Q_k=2\tau_k A_{10}-2R^2A_{10}\left[1-(-1)^k\right]\frac{I_2'(\lambda_k R)}{I_2(\lambda_k R)} \tag{22}$$

где

$$\tau_k=\int_0^l\tau(z)\sin(\lambda_k z)dz,\quad \sigma_k=\int_0^l\sigma(z)\sin(\lambda_k z)dz, \tag{23}$$

4) Из условия для нормального напряжения имеем

$${}_kg_{6k}(R)+\frac{4\lambda_k}{R}\sum_{p=1}^{\infty}Z_{pk}\frac{(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}=$$

$$=\sigma_k+\frac{1}{\lambda_k}G_{1k}(R)-\frac{2R}{\lambda_k}\left(A_{10}-\nu\Theta_0\right)\left[1-(-1)^k\right] \tag{24}$$

$$Z_{pk}=\begin{cases}X_p & (p=1,3,5\ldots)\\ Y_p & (p=2,4,6\ldots)\end{cases}\qquad k=1,2,3\ldots$$

5) Из условия $\tau_{rz}(R,z)=\tau_1$ получим

$${}_kg_{5k}(R)+\frac{8}{R^2}\sum_{p=1}^{\infty}Z_{pk}\frac{(1-\nu)\alpha_p^2-\nu\lambda_k^2}{\left(\alpha_p^2+\lambda_k^2\right)^2}= \tag{25}$$

$$= G_{5k}(R) + \frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\lambda_k^2}\left(C_0 + 2B_0\right)$$

$$F_0 + \frac{1}{2}C_0 l + \frac{8(1-\nu)}{R^2 l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y_p}{\alpha_p^2} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} + \tau_0$$

Из бесконечных систем (24) ,(25), учитывая соотношение

$$g_{6k}(R) = \frac{\lambda_k R}{2} g_{6k}(R) = \frac{x\left(I_1^2 - I_0 I_2\right)}{} - \frac{2(1-\nu)I_1}{x I_2'} \tag{26}$$

для определения коэффициентов P_k получим уравнение

$$\sigma_k + \frac{1}{\lambda_k} G_{1k}'(R) - \frac{2R}{\lambda_k}\left(A_{10} - \nu\Theta_0\right)\left[1-(-1)^k\right] =$$

$$= \frac{\lambda_k R}{2}\left[G_{5k}(R) + \frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\lambda_k^2}\left(C_0 + 2B_0\right)\right] \tag{27}$$

Откуда

$$\lambda_k R P_k = \sigma_k + \tau_k - \left[1-(-1)^k\right] R^2 A_{10}\frac{I_2'\left(\lambda_k r\right)}{I_2\left(\lambda_k R\right)} -$$

$$- \frac{R\left[1-(-1)^k\right]}{2\lambda_k}\left(C_0 + 2B_0 + 4A_{10} - 4\nu\Theta_0\right) \tag{28}$$

Пользуясь формулой

$$\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\alpha_p(a-z)}{\alpha_p^2\operatorname{ch}\alpha_p a}\,\frac{J_1\left(\alpha_p r\right)}{J_1\left(\alpha_p R\right)} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\lambda_k^3}\,\frac{I_1\left(\lambda_k r\right)}{I_1\left(\lambda_k R\right)}\sin\lambda_k z =$$

$$= \frac{r}{R^2}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) + \frac{2rz(l-z)}{R^2} \tag{29}$$

нетрудно убедиться, что во всех формулах нужно подставить $A_{10} = 0$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} A_{10} = A_{20} = E_0 = E_0 = D_0 = 0 \\ 2(1-2\nu)\left(B_0 + \frac{\rho g}{2G}\right) + C_0 = 0 \end{gathered} \tag{30}$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнений (15), (24) и (25).

Заметим, что первое уравнение (16) можно было заменить уравнением

$$r^2\left[A_{10}-A_{20}-4D_0z\right]+2E_0z+2G_0+\frac{2}{R}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h_{0p}(z)J_0(\alpha_p r)}{\alpha_p J_1(\alpha_p R)}=0$$

Тогда, при учете свойств функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$, $(k=1,2\cdots, J_2(\lambda_k r)=0)$, приведенных в приложении, мы опять пришли бы к совокупности бесконечных систем уравнений (15.)

Для доказательства регулярности бесконечных систем (15), (24) и (25) оценим сумму

$$K=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left|\nu\lambda_1^2-(1-\nu)\alpha_p^2\right|}{(\alpha_p^2+\lambda_1^2)(\alpha_p^2+\lambda_2^2)}<\frac{R^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\left|\nu x_1^2-(1-\nu)\xi^2\right|}{(\xi^2+x_1^2)(\xi^2+x_2^2)}d\xi$$

$$\frac{\pi}{R^2}K\le\frac{x_2-\nu(x_1+x_2)}{x_2(x_1+x_2)}\left(\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+ \tag{31}$$

$$+\frac{2\left[x_2^2-\nu(x_2^2-x_1^2)\right]\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2^2(x_1+x_2)}\left[1+\frac{\nu(x_2-x_1)}{x_2}+\frac{\nu(4\nu-1)(x_2-x_1)^2}{3x_2^2}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{x_2-\nu(x_1+x_2)}{x_2(x_1+x_2)}\left(\frac{\pi}{2}-2arctg\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+$$

$$+\frac{2\left[x_2^2-\nu(x_2^2-x_1^2)\right]\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2(x_1+x_2)\left[x_2-\nu(x_2-x_1)\right]}\left[1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7}+\ldots\right]$$

где

$$z=\frac{(x_2-x_1)\sqrt{\nu(1-\nu)}}{x_2-\nu(x_2-x_1)}; \tag{32}$$

В нашем случае $\lambda_1=\lambda_2$, $x_1=x_2=x=\lambda_k R$, следовательно

$$K\le\frac{R}{\pi\lambda_k}d(\nu),\quad d(\nu)=(1-2\nu)\left(\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right)+\sqrt{\nu(1-\nu)} \tag{33}$$

$$d(\nu)=d(1-\nu);\quad \left.\frac{1}{2}\le d(\nu)\le\frac{\pi}{4}\right\},\ \left(0\le\nu\le\frac{1}{2}\right)$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно убедится, что если совокупность уравнений (15), (24) и (25) привести к одной бесконечной системе относительно Z_k или $(X_k),(Y_k)$ то сумма модулей коэффициентов полученной системы при от $(0<\nu<0.5)$ имеет оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\bar{a}_{pk}\right| \leq \frac{\pi^2}{16} \tag{34}$$

Следовательно бесконечные системы вполне регулярны, т.е можно их решить методом последовательных приближений.

Для изгибающего момента и перерезывающей силы имеем

$$M_y(z)=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r^2\sigma_z(r,z,\varphi)\cos\varphi dr,$$

$$F_x(z)=2\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^R r\tau_z(r,z,\varphi)dr$$

Используя решение задачи после некоторых несложных преобразований получим

$$\frac{M_y(z)}{2\pi R^2G}=\frac{R^2}{4}\left(C_0-\nu\Theta_0\right)+\frac{\rho gz(l-z)}{4G}+ \tag{35}$$

$$+\frac{1}{2Rl}\int_0^l[\sigma(x)+\tau(x)][l(z+x)-l|z-x|-2zx]dx$$

$$\frac{F_x(z)}{2\pi R^2G}=\tau_0+\frac{\rho g(l-2z)}{4G}+\frac{1}{2Rl}\int_0^l[\sigma(x)+\tau(x)][l-l\,\mathrm{sgn}(z-x)-2x]dx \tag{36}$$

где

$$\Theta_0=B_0+\frac{\rho g}{2G}=-\frac{C_0}{2(1-2\nu)} \tag{37}$$

Этими формулами определяются также и реакции опор.

Такой подход допускает рассмотрение некоторых других неосесимметричных статических и динамических задач теории упругости для цилиндра конечных размеров. Отметим, что рассмотренную задачу можно было решать, если за считать, что $\alpha_p -$ корни уравнения $J_1'\left(\alpha_p R\right)=0$. При этом число бесконечных систем получается на одну больше, а число свободных членов на две меньше. Возникшая новая система отличается от других, тем, что сумма модулей ее коэффициентов при неизвестных стремится к нулю как $O\left(k^{-2}\right)$. Сумма модулей коэффициентов при неизвестных совокупности всех систем определяется также формулой (33) и имеет оценку (35). Это связано с тем,что корни функций $J_2(x)$ и $J_1'(x)$ асимптотически совпадают.

Приложение

О свойствах функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$, $\quad (k = 1,2\cdots, J_2(\lambda_k r) = 0)$

Функции $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ линейно независимы. Это следует из $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$ и линейной независимости $J_1(\lambda_k r)$. Кроме того для $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ имеют место равенства

$$\int_0^R rJ_0(\lambda_n r)\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right]dr = 0, \; k \neq n$$

$$\int_0^R r\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right]dr = 0, \tag{1}$$

Действительно, проведя интегрирование по частям получим

$$\int_0^R rJ_0(\lambda_k r)\left[J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n R)\right]dr = \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\int_0^R rJ_1(\lambda_k r)J_1(\lambda_n r)dr \tag{2}$$

$$\int_0^R r\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right]dr = \frac{\lambda_k}{2}\int_0^R r^2 J_1(\lambda_k r)dr = 0$$

откуда следует (1), поскольку функции $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$ ортогональны с весом r

В частности из (2) следует ,что

$$\int_0^R rJ_0(\lambda_k r)\left[J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k R)\right]dr = \int_0^R rJ_1^2(\lambda_k r)dr$$

Система функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ полна в $(k = 1,2,\cdots)$ $L_2[0, R]$ т.е из

$$\int_0^R r\varphi(r)dr = 0, \quad \int_0^R r\varphi(r)J_0(\lambda_k r)dr = 0, \text{ где } \quad \varphi(r) \in L_2(0, R) \tag{3}$$

должно следовать, что $\varphi(r) = 0$ почти всюду.

Для этого сначала рассмотрим множество функций непрерывно дифференцируемых и обладающих свойством $\varphi(0) = \varphi(R) = 0$. Известно, что указанное множество функций плотно в $L_2[0, R]$.

Пусть в (3) $\varphi(r)$ принадлежит указанному множеству. Тогда интегрированием по частям из (3) получим

$$\int_0^R r^2\varphi'(r)dr = 0, \quad \int_0^R r\varphi'(r)J_0(\lambda_k r)dr = 0$$

Из полноты системы функций $\{r, J_1(\lambda_k r)\}$ следует, что $\varphi'(r) = 0$, т.е. $\varphi(r) = 0$.

Это означает, что линейная оболочка, построенная на системе функций $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$ плотна в $L_2[0, R]$, т.е. при любом $\varepsilon \succ 0$

$$\int_0^R r\left(\varphi(r) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k J_0(\lambda_k r)\right)\right)^2 dr < \varepsilon,$$

где

$$\varphi(r) \in L_2[0, R]$$

Теперь пусть $\varphi(r)$ функция из $L_2[0, R]$ и пусть для нее имеет место (3). Тогда будем иметь

$$\int_0^R r\varphi^2(r)dr = \int_0^R r\varphi(r)\left(\varphi(r) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k J_0(\lambda_k r)\right)\right)dr < \varepsilon\sqrt{\int_0^R r\varphi^2(r)dr},$$

Отсюда следует , что

$$\int_0^R r\varphi^2(r)dr < \varepsilon^2$$

Поскольку ε может быть сколь угодно малым положительным числом, то отсюда следует, что $\varphi(r) = 0$ почти всюду.

Итак, полнота системы $\{1, J_0(\lambda_k r)\}$, $(k = 1, 2 \cdots)$ доказана.

Литература

1. *Абрамян Б.Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. - Докл. АН АрмССР, 1958, т.26, №2.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных вектор функций в пространственных задачах теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1979.
3. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. - Киев: Наукова думка, 1978.
4. *Баблоян А.А.,Мкртчян А.М.,Терзян С.А.* Осесимметричные контактные задачи для конечного цилиндра. Вторая Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезисы докладов.Тбилиси, 1984.
5. *Макарян В.С.,Попоян С.О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1980, т.33, №1, с. 3-11.
6. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. - Киев: Наукова Думка, 1977.
7. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости.-М.: Гостехиздат, 1955.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, ч.1, М., 1949.

Институт Механики НАН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1995