

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ
С ПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ.**

Бабаджанян Г. А., Даниелян Л. Е.

Բաբաջանյան Գ. Ա., Դանիելյան Լ. Ե.

Իրական հեղուկի շարժման զարգացման ուսումնասիրությունը
շարժական պարունակ հարթ խողովակում

Նկարագրությունը բերվում է հարուկ ձևով գծայնացված Նավե-Ստոկսի հավասարումների լուծմանը: Որոշված է հեղուկի հոսքի արագության, ճնշման և չիման ուժի (չիման գործակիցը) փոփոխման օրենքների խողովակի երկայնական և լայնական կարվածքներում, որոնք էապես կախված են հոսքի հիմնական և պարբերի արագությունների հարաբերություններից Որոշվում է խողովակի նախնական կարվածքի երկարությունը:

G. H. Babadjanian, L. E. Danielian

The Investigation of Development of Real Fluid Motion in a Plane Canal with Mobile Walls

Задача сводится к решению частично линеаризованной системы Навье - Стокса. С помощью интегрального преобразования Лалласа получены функциональные решения в конечном виде. Определены закономерности изменения скоростей, давления и коэффициента гидродинамического сопротивления. Определена и длина начального участка канала.

1. Изучение закономерностей движения вязкой жидкости в каналах с неподвижными и подвижными стенками имеет как теоретический так и практический интерес. Движение жидкости в каналах с подвижными стенками относится к классу малоизученных течений. Вместе с тем, такие исследования и определение законов изменений параметров таких течений имеют много технических приложений: при определении утечек жидкости через щели между неподвижными направляющими и подвижными штоками различных машин и механизмов, при изучении проблем трубопроводного транспорта грузов в контейнерах, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии и т. д.

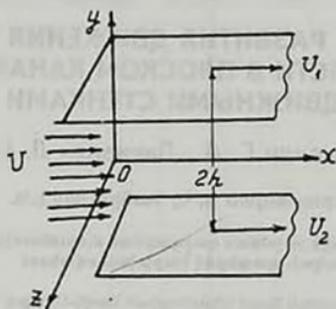
Теоретические исследования вышеуказанных задач, в основном, проводились в приближении Стокса, при котором не учитывались все инерционные члены в левых частях дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Поэтому, полученные результаты описывали закономерности движения в так называемом стабилизированном участке канала, то есть на достаточном удалении от его входа.

Таким образом, невозможно было определить изменение значения параметров движения в начальном участке канала, где, естественно, имеют место специфические особенности. Последние имеют не только теоретическое, но и очень важное практическое значение. Таким образом, полученные результаты по методу Стокса не дают представления о развитии движения жидкости, что особенно важно для коротких труб.

В предлагаемой работе рассматривается задача о развитии течения жид-

кости между параллельными движущимися плоскостями, простирающимися в направлениях осей X и Z до бесконечности.

Движение стенок происходит в своих плоскостях в направлении оси Ox с заданными постоянными скоростями U_1 и U_2 . Кроме того, имеет место и напорное течение жидкости, при котором на входе в канал формируется плоский однородный профиль скорости (фиг. 1).



Фиг. 1

За основу исходных уравнений движения принимаются приближенные уравнения, полученные из системы уравнений Навье-Стокса путем частичного учета слагаемых от ускорения и вязкости. Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, а движение ее ламинарным, стационарным, изотермическим и плоско-параллельным, то при отсутствии массовых сил уравнения движения будут иметь вид [1].

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

где U — средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы; v_x и v_y — составляющие скорости по осям Ox и Oy ; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Расстояние между плоскостями пусть будет $2h$. Если начало координат выбрать на средней плоскости канала, то граничные условия для задачи по развитию течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \text{ и } |y| < h \quad v_x = U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y = h \text{ и } x > 0 \quad v_x = U_1, \quad v_y = 0 \\ \text{при } y = -h \text{ и } x > 0 \quad v_x = U_2, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь p_H — значение давления в начале трубы.

2. Применяя функциональное преобразование Лапласа и решая уравнения

(1.1), при граничных условиях (1.2) получим

$$v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{U_1 + U_2}{4} \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1 \right) + \frac{U_1 - U_2}{2} \frac{y}{h} +$$

$$+ (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos(\mu_n y / h)}{\cos \mu_n} \right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{Reh}\right) +$$

$$+ \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi n / h)}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{Reh}\right) \quad (2.1)$$

$$v_y = \frac{U_1 + U_2 - 2U}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin(\mu_n y / h)}{\sin \mu_n} \right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{Reh}\right) +$$

$$+ \frac{U_2 - U_1}{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \cos \frac{\pi n y}{h} - 1 \right] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 x}{Reh}\right) \quad (2.2)$$

$$p = p_H + \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left[-\frac{3x}{Reh} - \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{Reh}\right) \right] \quad (2.3)$$

где $Re = \frac{Uh}{\nu}$ - число Рейнольдса, а μ_n - простые корни уравнения $tg \mu = \mu$

Известно, что при течении вязкой жидкости в напорных трубах градиент давления зависит от средней скорости течения, параметров жидкости и трубы по следующей формуле:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\xi \frac{1}{2h} \frac{\rho U_{cp}^2}{2} \quad (2.4)$$

где U_{cp} - средняя скорость течения жидкости в канале, ξ - обычный коэффициент гидравлического сопротивления. В случае неподвижных стенок коэффициент ξ обусловлен только диссипацией механической энергии жидкости за счет работы сил внутреннего трения.

Если стенки канала подвижные, то ξ зависит и от внешних по отношению к жидкости сил трения на подвижных стенках. Этот коэффициент в последнем случае может принимать любые значения (обращаться в нуль или быть даже отрицательным).

Для определения значения ξ в случае подвижных стенок при развитом течении жидкости из (2.3) найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho U^2 \left(-\frac{3}{Reh} - \frac{2}{Reh} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{Reh}\right) \right) \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.4) и (2.5) получим:

$$\xi = \frac{4}{\text{Re}} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left(3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{x}{\text{Re}h} \right) \right) \quad (2.6)$$

Формулы (2.1), (2.2), (2.3) и (2.6) описывают изменения значений параметров движения жидкости (скоростей, давления и коэффициент сопротивления) вдоль канала.

При исследовании развития движения жидкости в каналах важное практическое значение имеет длина начального участка потока. Для ее определения сначала найдем максимальное значение осевой скорости по высоте. Как видно, в формуле (2.1) последние два слагаемых (бесконечные суммы) быстро стремятся к нулю при удалении от входа в канал, по этой причине ради простоты вычисления их можно не учитывать. С точностью до вышеуказанного приближения из (2.1) легко определить величину y_0 при котором v_x принимает экстремальное значение.

$$y_0 = \frac{(U_2 - U_1)h}{3(U_1 + U_2 - 2U)} \quad (2.7)$$

Дальнейшие вычисления показывают, что при $|U_1 + U_2| < 2U$ (2.7) дает значение y , при котором осевая скорость v_x максимальна, а при $|U_1 + U_2| > 2U$ минимальна. Экстремальное значение скорости v_x будет

$$v_{x \text{ экстр}} = \frac{3U}{2} - \frac{(U_2 - U_1)^2}{12(U_1 + U_2 - 2U)} - \frac{U_1 + U_2}{4} \quad (2.8)$$

Составляя отношение разности экстремальной скорости частиц жидкости на бесконечном удалении от вход и скорости частиц на конечном расстоянии L от входа к экстремальной скорости, найдем

$$\frac{v_{x \text{ экстр}} - v_{L \text{ экстр}}}{v_{x \text{ экстр}}} = \frac{12(U_1 + U_2 - 2U)}{(U_2 - U_1)^2 + 3(U_1 + U_2)(U_1 + U_2 - 2U) - 18U(U_1 + U_2 - 2U)} \times$$

$$\times \left\{ (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos(\mu_n y_0 / h)}{\cos \mu_n} \right) \exp \left(-\mu_n^2 \frac{L}{\text{Re}h} \right) + \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(y_0 n \pi / h)}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 L}{\text{Re}h} \right) \right\} \quad (2.9)$$

Задавая значение левой части уравнения (2.9) и решая ее, можно получить приближенное значение длины начального участка L плоской трубы, на протяжении которого экстремальное (максимальное) значение скорости частиц будет отличаться от своего экстремального значения на заданную малую величину.

Для простоты вычисления в правой части уравнения (2.9) из первой суммы оставлено лишь первое слагаемое, а вторая сумма отброшена по вышеу-

казанным причинами. Полагая, например, значение левой части (2.9) равным 0^{-2} , получим:

$$\frac{U_1 + U_2 - 2U}{\mu_1^2} \left(\frac{\cos(\mu_1 y_0 / h)}{\cos \mu_1} - 1 \right) \exp\left(-\mu_1^2 \frac{L}{Reh}\right) = \quad (2.10)$$

$$= 10^{-2} \frac{18U(U_1 + U_2 - 2U) - (U_2 - U_1)^2 - 3(U_1 + U_2)(U_1 + U_2 - 2U)}{12(U_1 + U_2 - 2U)}$$

Здесь μ_1 - наименьший отличный от нуля корень уравнения $tg \mu = \mu$. Решая (2.10) относительно L , получим приближенное значение длины начального участка

$$L = \frac{Reh}{\mu_1^2} \left\{ \ln \frac{66,7(2U - U_1 - U_2)(\cos \mu_1 - \cos \mu_1 y_0)}{U \mu_1^2 \cos \mu_1} - \right.$$

$$\left. - \ln \left[1 - \frac{(U_2 - U_1)^2}{18(U_1 + U_2 - 2U)} - \frac{U_1 + U_2}{6U} \right] \right\} \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что для действительного и положительных значений длины начального участка величины U_1 и U_2 должны подчиняться заранее заданным условиям. Поэтому, в рассмотренном общем случае понятие начального участка условно и имеет ограниченное практическое приложение. На практике часто встречаются случаи, при которых движется лишь одна стенка.

Если в формулах (2.1), (2.2), (2.3) и (2.6) $x \rightarrow \infty$, получим значения параметров движения для стабилизированного участка канала [2].

$$v_{x\infty} = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) - \frac{U_1 + U_2}{4} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{2} \frac{y}{h} \quad (2.12)$$

$$v_{y\infty} = 0 \quad (2.13)$$

$$p_\infty = p_H - \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \left(\frac{3x}{Reh} - \frac{1}{5} \right) \quad (2.14)$$

$$\xi = \frac{12}{Re} \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U} \right) \quad (2.15)$$

Принимая в формулах (2.12) - (2.15) $U_1 = U_2 = 0$, будем иметь значение величин в стабилизированном участке канала в случае неподвижных стенок.

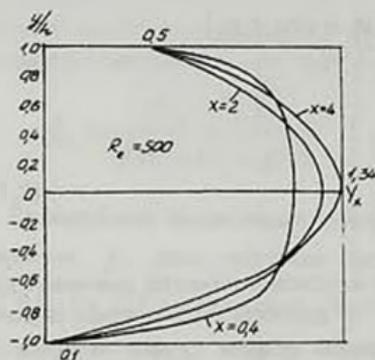
Если в полученных формулах принять $U_1 = U_2 = 0$ и одновременно $x \rightarrow \infty$, получим обобщенный случай движения Куэтта [3].

Рассмотрим численный пример по следующим данным:

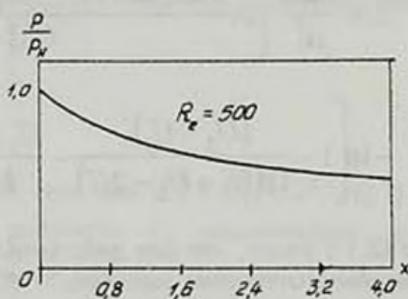
$$U = 1 \text{ м/се} \quad U_1 = 0,5 \text{ м/се} \quad U_2 = 0,1 \text{ м/се} \quad h = 0,05 \text{ м}$$

$$v = 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{се} , p_H = 100 \text{ кг} / \text{м}^2 , \rho = 102 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \text{се}^2$$

На фиг. 2 представлен закон изменения осевой скорости V_x в начальном участке по высоте и вдоль канала. Видно, что в области, близкой к начальному сечению, изменение скорости V_x по высоте происходит медленнее. Вдоль канала по течению скорость V_x увеличивается и начиная от сечения $x = 2.4$, принимает почти постоянные значения. Ее максимальное значение находится на высоте $y = 0.11h$. На фиг. 3 представлен закон изменения давления, из которого видно, что давление вдоль канала уменьшается: при этом в начальном участке уменьшение происходит быстрее, чем вблизи стабилизированного участка.

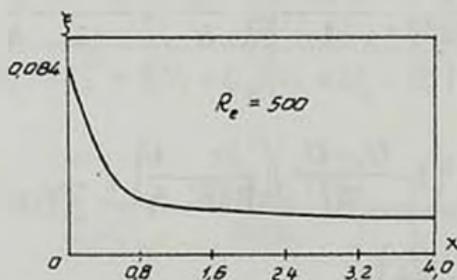


фиг. 2.



фиг.3.

На фиг. 4 представлен закон изменения коэффициента сопротивления трения по длине канала. Видно, что его значение уменьшается вдоль канала по течению.



фиг.4.

Для приведенного численного примера по формуле (2.11) вычислена длина начального участка, которая оказалась равной, приблизительно 4 м. Полученные формулы и приведенные графики позволяют исследовать различные случаи движения реальной жидкости в плоском канале с подвижными стенками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабиджян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями- Изв. АН Арм. ССР,

Механика, 1987, т. 40, № 3, с. 49-53.

2. *Слезкин Н. Н.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости- М.: Гостехтеориздат, 1955.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя- М.: Изд. иностр. литер., 1956.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

8. 06. 1994