ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 3, 1995 Механика

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ

Мовсисян Л. А., Габриелян М. С.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Մ.Ս. Գաբրիելյան

Ջերմաառաձգական սալի շարժման ղեկավարման մի խնդրի մասին

Դիտարկվում է ջերմաառաձգական (կապակցված խնդիր) սալի ծռման շարժման օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը: Տրված նախնական պայմանների դեպքում պահանջվում է բեռի և ջերմության միջոցով սալը ժամանակի որոշակի երկու պահերի համար բերել տրված վիճակների: Որպես օպտիմալություն սկզբունք մինիմիզացվում է ջերմությունից և բեռից քառակուսային ֆունկցիոնալը.

L. A. Movsisian, M. S. Gabrielian

On one problem of controling the thermoelastic plate-layer's motion

Изучается задача оптимального управления одномерного изгибного колебания термоупругой пластинки (связанная задача). При заданных начальных условиях относительно прогиба, его скорости и температуры требуется при помощи нагрузки и температуры объект привести в фиксированные моменты времени к заданным положениям (для простоты изложения таких положения берутся два).

В качестве критерия оптимальности минимизируется квадратичный функционал от действующей нагрузки и температуры.

1. Уравнения поперечного движения пластинки и связанной задачи теплопроводности в классической постановке на основании [1-3] берутся в виде

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\alpha(1+\nu)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right]+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t) \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\left(\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6k^*}{\rho h^2 c_p}\right)T-\chi\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=\\ =\frac{12\dot{Q}z_0}{\rho h^3 c_p}+\frac{6k^*\left(T_+-T_-\right)}{\rho h^2 c_p}=\Phi(x,t)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Обозначения общепринятые или сохранены [1-3], поэтому здесь не разъясняются.

Пусть имеются следующие граничные:

$$\begin{gathered}w=M=-D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\alpha(1+\nu)T\right]=0,\quad T=\Phi_1(t)\quad \text{при}\ \ x=0\\ w=M=0,\quad T=\Phi_2(t)\quad \text{при}\ \ x=l\end{gathered} \tag{1.3}$$

и начальные условия

$$w = F_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F_2(x), \quad T = T_0(x) \quad \text{при } t = 0 \tag{1.4}$$

Представляя решения (1.1) и (1.2)

$$w_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l w(x,t)\sin\lambda_k x\,dx, \quad T_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l T(x,t)\sin\lambda_k x\,dx, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.5}$$

с учетом граничных условий (1.3) будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \omega_k^2 w_k - a_k T_k = f_k(t) \\ &\frac{dT_k}{dt} + \chi_k T_k + b_k\frac{dw_k}{dt} = \psi_k(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\omega_k^2 = \frac{D}{\rho h}\lambda_k^4, \quad a_k = \frac{\alpha(1+\nu)}{\rho h}\lambda_k^2, \quad b_k = \chi\eta\lambda_k^2$$

$$\chi_k = \frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k^*}{\rho h c_p} + \chi\lambda_k^2, \quad f_k = \frac{2}{\rho h l}\int_0^l F\sin\lambda_k x\,dx$$

$$\psi_k = \chi\lambda_k\left[\Phi_1(t) - (-1)^k\Phi_2(t)\right] + \varphi_k, \quad \varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi\sin\lambda_k x\,dx$$

Начальные условия для системы (1.6) будут

$$w_k(0) = c_k, \quad \frac{dw_k(0)}{dt} = d_k, \quad T_k(0) = e_k \tag{1.7}$$

где постоянные c_k, d_k и e_k - соответствующие коэффициенты Фурье разложения функций (1.4).

2. Задача ставится следующим образом: в момент $t = 0$ пластинке сообщается начальное отклонение, скорость и температура по (1.4). Требуется в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$ пластинку привести в определенные положения $w_1(x, t_1)$ и $w_2(x, t_2)$ при этом минимизируя следующий функционал:

$$I = \int_0^{t_2}\int_0^l \left(\beta F^2 + 2\gamma F\Psi + \varepsilon\Psi^2\right)dx\,dt \tag{2.1}$$

Выбор постоянных $\beta, \gamma, \varepsilon$ $\left(\beta > 0, \beta\varepsilon > \gamma^2\right)$ в некотором смысле произволен и для конкретной конструкции их следует связать с тем, какое воздействие (силовое или температурное) легче осуществить. Интеграл (2.1) не есть полная внутренняя энергия пластинки, но характеризует ее, в частных случаях может быть и внутренняя энергия.

Учитывая разложения F и Ψ, из (2.1) получим

$$I = \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{t_2}\left(\beta f_k^{\,2} + 2\gamma f_k\psi_k + \varepsilon\psi_k^{\,2}\right)dt \tag{2.2}$$

Имея в виду, что в последнем функционале слагаемые независимые, минимизация (2.2) для каждого k осуществляется в отдельности.

Таким образом, для каждого k с учетом (1.6) получим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \alpha x_3 + u, \quad \dot{x}_3 = -\chi x_3 - \xi x_2 + \nu \tag{2.3}$$

при минимизации функционал

$$I_k = \frac{l}{2}\int_0^t\left(\beta u^2 + 2\gamma u\,\mathrm{v} + \varepsilon\,\mathrm{v}^2\right)dt; \quad \beta > 0; \quad \beta\varepsilon > \gamma^2 \tag{2.4}$$

Чтобы не загромождать формулы, индекс k опущен и использованы обозначения

$$\begin{gathered} x_{1k} = \omega_k w_k, \quad x_{2k} = \dot{w}_k, \quad x_{3k} = T_k \\ \xi_k = b_k\omega_k\sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad u_k = f_k, \quad \mathrm{v}_k = \psi_k \end{gathered} \tag{2.5}$$

Решение системы (2.3) запишется

$$\bar{x}(t) = X(t,0)\,\overline{X}(0) + \int_0^t X(t,\tau)\begin{pmatrix}0\\ u\\ \nu\end{pmatrix}d\tau \tag{2.6}$$

где $X(t,\tau)$ - нормированная фундаментальная матрица, соответствующая однородной системе (2.3), выражение которой из-за громоздкости не приводится. Приведем выражение только двух элементов, которые нам и в дальнейшем понадобятся.

$$x_{12}(t,\tau) = -\frac{\omega(\mu_3+\mu_2)e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)} + \frac{\omega(\mu_3+\mu_1)e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} - \frac{\omega(\mu_1+\mu_2)e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}$$

$$x_{13}(t,\tau) = \frac{a\omega e^{\mu_1(t-\tau)}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_1)} - \frac{a\omega e^{\mu_2(t-\tau)}}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} + \frac{a\omega e^{\mu_3(t-\tau)}}{(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)}$$

где μ_i - корни характеристического уравнения

$$\mu^3 + \chi\mu^2 + \left(\omega^2 + a\xi\right)\mu + \omega^2\chi = 0 \tag{2.7}$$

Рассматривается случай, когда корни уравнения (2.7) различные (физически, наверное, только этот случай возможен). Случай кратных корней не приводится, так как класс таких задач узкий, к тому же исследование можно провести совершенно аналогичным образом.

Через $\overline{X}(0)$ обозначен вектор

$$\overline{X}(0) = \begin{pmatrix} c = \omega_k c_k \\ d = d_k \\ e = e_k \end{pmatrix}$$

Пусть требуется, чтобы пластинка в момент $t = t_1 > 0$ принимала форму $w_1\left(x, t_1\right)$, а в $t = t_2 > t_1$ - $w_2\left(x, t_2\right)$.

Представляя w_1 и w_2 в виде рядов

$$w_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \sin\lambda_k x, \quad w_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \sin\lambda_k x \tag{2.8}$$

из (2.6) получим следующие интегральные условия:

$$\begin{gathered} \int_0^{t_i} x_{12}\left(t_i, \tau\right) u\, d\tau + \int_0^{t_i} x_{13}\left(t_i, \tau\right) v\, d\tau = L_i, \quad i = 1,2 \\ L_i = A^{(i)} - x_{11}\left(t_i\right) c - x_{12}\left(t_i\right) d - x_{13}\left(t_i\right) e \end{gathered} \tag{2.9}$$

Обозначим [4]

$$h_{11}(\tau) = \begin{cases} x_{12}(t, \tau) & \text{при } 0 \le \tau \le t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \le t_2 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$h_{12}(\tau) = \begin{cases} x_{13}(t, \tau) & \text{при } 0 \le \tau \le t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < \tau \le t_2 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$h_{21}(\tau) = x_{12}\left(t_2, \tau\right), \quad h_{22}(\tau) = x_{13}\left(t_2, \tau\right), \quad 0 \le \tau \le t_2$$

тогда интегральные условия (2.9) примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \int_0^{t_2} h_{11}(\tau)\, u\, d\tau + \int_0^{t_2} h_{12}(\tau)\, v\, d\tau = L_1 \\ \int_0^{t_2} h_{21}(\tau)\, u\, d\tau + \int_0^{t_2} h_{22}(\tau)\, v\, d\tau = L_2 \end{gathered} \tag{2.12}$$

Таким образом, проблема сводится к минимизации функционала (2.5) при наличии интегральных условий (2.12).

Так как функции $h_{ij}(\tau)$ имеют разрывы первого рода, то целесообразно полученную вариационную задачу решить с помощью проблемы моментов [5]. Исходя из вида функционала (2.5), норма основного пространства будет

$$\rho_0^2 = \min_{L_1 l_1 + L_2 l_2 = 1} \rho^2\left(h_{1l}(\cdot), h_{2l}(\cdot)\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta\varepsilon - \gamma^2} \int_0^t \min_{L_1 l_1 + L_2 l_2 = 1} \left[\varepsilon h_{1l}^2 - 2\gamma h_{1l} h_{2l} + \beta h_{2l}^2\right] dt > 0 \tag{2.13}$$

Норма сопряженного пространства выбирается в виде (2.4).

Так как система (2.3) вполне управляема [6], то $\rho_0^2 > 0$. После несложных вычислений получим

$$\rho_0^2 = \frac{1}{G} \frac{PR - Q^2}{\beta\varepsilon - \gamma^2}, \quad l_1^0 = \frac{L_1 R - L_2 Q}{G}, \quad l_2^0 = \frac{PL_2 - QL_1}{G} \tag{2.14}$$

где

$$G_1 = PL_2^2 = 2QL_1 L_2 + RL_1^2$$

$$P = \int_0^{t_2} \left(\varepsilon h_{11}^2 + \beta h_{12}^2 - 2\gamma h_{11} h_{12}\right) dt$$

$$Q = \int_0^{t_2} \left(\varepsilon h_{11} h_{21} + \beta h_{12} h_{22} - 2\gamma\left(h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}\right)\right) dt$$

$$R = \int_0^{t_2} \left(\varepsilon h_{21}^2 + \beta h_{22}^2 - 2\gamma h_{21} h_{22}\right) dt$$

Вектор $h^0(t)$ будет

$$\begin{pmatrix} h_1^0 \\ h_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} \left(L_1 R - L_2 Q\right) h_{11}(t) + \left(L_2 P - L_1 Q\right) h_{21}(t) \\ \left(L_1 R - L_2 Q\right) h_{12}(t) + \left(L_2 P - L_1 Q\right) h_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Если искать оптимальные значения управляющих воздействий $u_0(t)$ и $v_0(t)$ следующим образом:

$$u_0(t) = \sigma\left(\varepsilon h_1^0 - \gamma h_2^0\right); \quad v_0(t) = \sigma\left(\beta h_2^0 - \gamma h_1^0\right) \tag{2.16}$$

в постоянное определить из условия

$$\int_0^{t_2}\left(h_1^0u^0+h_2^0v_0\right)dt=1 \qquad (2.17)$$

то получим

$$u^0=\frac{Q}{PR-Q^2}\left(\varepsilon h_1^0-\gamma h_2^0\right),\quad v^0=\frac{Q}{PR-Q^2}\left(\beta h_2^0-\gamma h_1^0\right) \qquad (2.18)$$

Нетрудно проверить, что

$$\rho_*^2\left(u^0(\cdot),v^0(\cdot)\right)=\rho_0^{-2} \qquad (2.19)$$

Таким образом, управляющие оптимальные функции будут

$$F^0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^0(t)\sin\lambda_k x,\quad \Phi^0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k^0(t)\sin\lambda_k x \qquad (2.20)$$

Так как $w_k\sim O\left(k^{-1}\right)$, x_i, c, d, e, $\sim\left(k^{-2}\right)$, элементы фундаментальной матрицы имеют нулевой порядок, $A_k^{(i)}\sim\left(k^{-2}\right)$, а F и Φ по (1.1), (1.2) принадлежат классу L_2 по x_i, то f_k и φ_k имеют порядок не больше, чем k^{-1}, а из условия ограниченности "энергии" (2.2) коэффициенты β, γ, ε имеют порядок не больше, чем k^{-1}.

Величины P, Q и R из (2.15) имеют порядок не больше, чем k^{-2}, следовательно, u_k^0 и v_k^0 имеют порядок не больше, чем $k^{-\delta}$, где $\delta>1$, т.е. функции F^0 и Φ^0 принадлежат к классу $L_2\left[0,t_2\right]$.

3. Для иллюстрации вышеприведенных результатов рассмотрим конкретный пример для пластинки из меди. Она теплоизолирована $\left(k^*=0\right)$, отсутствуют тепловые источники и не подается тепло через края $\left(\Phi=\Phi_1=\right.$ $\left.=\Phi_2=0\right)$. Температура возникает только из-за деформации, а управление движением осуществляется только через нагрузку.

Предполагается, что пластичке сообщено начальное отклонение по одной полуволне, по такой же форме прилагается нагрузка. Тогда, вместо системы (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\varphi-1.33\cdot10^5\theta=10^8 f(\tau)\\&\frac{d\theta}{d\tau}+1.196\cdot10^{-3}\theta+0.85\cdot10^{-7}\frac{d\varphi}{d\tau}=0\end{aligned} \qquad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0)=1,\quad \dot\varphi(0)=0,\quad \theta(0)=0 \qquad (3.2)$$

Здесь введены обозначения и принято

$$\tau=\omega_1 t,\quad \omega_1{}^2=\frac{Eh^2\pi^4}{12(1-\nu^2)\rho l^4},\quad \varphi=\frac{w_1(t)}{w_1(0)}$$

$$\theta=\alpha h T_1,\quad \frac{\pi h}{l}=10^{-1},\quad \frac{w_1(0)}{h}=10^{-3}$$

Корнями характеристического уравнения (2.7) является

$$\mu_1=-1.17\cdot 10^{-3};\quad \mu_{2,3}=\eta\pm i\delta;\quad \delta=1.0113;\quad \eta=-1.35\cdot 10^{-5} \tag{3.3}$$

Вопрос ставится следующим образом: нагрузку $f(\tau)$ подобрать таким образом, чтобы в моменты $\tau_1=\dfrac{\pi}{2\delta}$ и $\tau_2=\dfrac{\pi}{\delta}$ амплитуда прогиба достигла $\varphi(\tau_1)=3$ и $\varphi(\tau_2)=2$.

Вычисление дает

$$\rho_0^2=0.02747 \tag{3.4}$$

Управляющая функция определяется как

$$f^0(\tau)=10^{-8}h^0(\tau)\rho_0{}^{-2} \tag{3.5}$$

где

$$h_0(\tau)=l_1^0 h_1(\tau)+l_2^0 h_2(\tau)$$

$$h_1(\tau)=\begin{cases}(A\sin\delta\tau+B\cos\delta\tau)\exp(\eta(\tau_1-\tau))-A\exp(\mu_1(\tau_1-\tau)), & 0\le\tau\le\tau_1\\ 0, & \tau_1<\tau\le\tau_2\end{cases}$$

$$h_2(\tau)=(B\sin\delta\tau-A\cos\delta\tau)\exp(\eta(\tau_2-\tau))-A\exp(\mu_1(\tau_2-\tau)),\quad 0\le\tau\le\tau_2$$

$$l_1^0=0.1679;\quad l_2^0=0.1692;\quad A=-2.64\cdot 10^{-5};\quad B=0.9889$$

В частности, если температурный эффект отсутствует, то управляющая функция есть

$$0^8 f(\tau)=\begin{cases}1.13\cos\tau+0.31\sin\tau, & 0\le\tau\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0.31\sin\tau, & \dfrac{\pi}{2}<\tau\le\pi\end{cases} \tag{3.6}$$

Аналогичным же образом можно осуществить управление движением и при совместном воздействии нагрузки и температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К устойчивости модуляционных волн в термоупругой пластине. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1993, т. 46, № 3-4, с.31-35.

2. *Новоцкий В.* Динамические задачи термоупругости.- М.: Мир, 1970, 256с.
3. *Болотин В. В.* Уравнение нестационарных температурах полей в тонких оболочках при наличии источников тепла.- ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 361-363.
4. *Габриелян М. С.* Об управлении линейной системы, описываемой одним уравнением высокого порядка.- Сб. трудов ЦНИЛСУ, 1970, вып. 1, Ереван, с.188-193.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968, 475 с.
6. *Калман Р.* Об общей теории систем управления.- Тр. 1 конгресса ИФАК, т.2, М., Изд-во АН СССР, 1961, с.521-547.

Институт механики НАН Армении
Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
1.12.1994