

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ
АМПЛИТУДЫ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Аветисян А. С.

Ավետիսյան Ա.Ս.

Վերջավոր լայնությամբ էլեկտրաառածական մակերևութային
ալիքները պինդէլեկտրական միջավայրում

Չնկատարվում է պինդէլեկտրական *bmm* դասի բյուրեղում մակերևութային ալիքի տարածումը երկրաչափական ոչ գծային դրվածքի դեպքում: Ստացված է ալիքային ազդանշանից զրգոված էլեկտրաառածական դաշտի նկարագիրը:

Avetisyan A.S.

Electroelastic surface waves of finite amplitude on an piezoelectric solid.

Исследуется распространение поверхностной электроупругой волны конечной амплитуды в пьезодиэлектрике класса *bmm* с учетом только геометрической нелинейности. Получены описания генерируемых первичным волновым сигналом электроупругих полей.

Рассматривается распространение электроупругих высокочастотных (коротких) волн конечной амплитуды, локализованные у поверхности раздела $x_2 = 0$ пьезодиэлектрика класса *bmm* гексагональной симметрии с вакуумом. Учет больших деформаций усложняет взаимодействие между упругим и электромагнитным полями, а также между плоским и антиплоским электроупругим состояниями.

Пьезодиэлектрическая среда занимает полупространство $|x_1| < \infty$, $|x_2| < 0$, $|x_3| < \infty$, где решаются уравнения движения упругой среды

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

и уравнения электромагнетостатики

$$\frac{\partial D_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial B_p}{\partial x_p} = 0, \quad n, p = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

в лагранжевой форме описания. Здесь $L_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ - тензор термодинамических напряжений Лагранжа, компоненты которого с учетом только геометри-

ческой нелинейности имеют вид [1, 2]:

$$L_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{mj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \delta_{ij} e_{mk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \left(\delta_{jm} c_{inlk} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{ijkl} \right) \frac{\partial u_r}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \quad (1.3)$$

Лагранжевые индукции электрического и магнитного полей с учетом конечных деформаций соответственно равны:

$$D_m = e_{mj} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \epsilon_{mk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ik} e_{mj} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \epsilon_{mn} l_{kmj} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

$$B_p = - \left(\mu_{kp} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn} \frac{\partial u_p}{\partial x_n} - \mu_{pl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{kp} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \quad (1.5)$$

В материальных соотношениях (1.3)-(1.5), а также в дальнейшем в материальных соотношениях внешней среды мы пользуемся выражениями лагранжевых напряженностей электрического $E_k(x, t)$, магнитного $H_k(x, t)$ полей, которые с учетом конечных деформаций описываются через градиент деформаций $\xi_{rj} = \delta_{rj} + u_{rj}$ и потенциалы соответствующих полей $\Phi(x, t)$ и $\Psi(x, t)$

$$E_m = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - l_{mnj} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \quad (1.6)$$

$$H_m = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} - l_{mnj} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n}$$

В соотношениях (1.4), (1.6) тензор "геометрической стрикции" l_{mnj} имеет вид

$$l_{mnj} = \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{nm}$$

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_n^{(0)}}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial E_p^{(0)}}{\partial x_p} = 0, \quad n, p = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

где индукции электрического $D_n^{(0)}(x, t)$ и магнитного $B_n^{(0)}(x, t)$ полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(0)}(x, t)$ и $\Psi^{(0)}(x, t)$ соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(0)}(x, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ [1]:

$$D_p^{(0)} = -\varepsilon_0 \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p} \right]$$

$$B_p^{(0)} = -\mu_0 \left[\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p} \right]$$
(1.8)

Естественно, что конечность деформаций поверхности электроупругой среды искажает ("деформирует") нематериальную внешнюю среду, чем и продиктованы выражения материальных уравнений (1.8). Учет "деформаций" внешней вакуумной области особенно важно в задачах о распространении поверхностных электроупругих волн.

На границе раздела сред $x_2 = 0$ удовлетворяются непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + l_{mnj} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_n} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_m} - \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + l_{mnj} \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} - \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_n} \right] = 0$$
(1.9)

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$D_2 = D_2^{(0)}, \quad B_2 = B_2^{(0)}$$
(1.10)

На недеформированной границе раздела $x_2 = 0$ термодинамические напряжения L_j должны равняться нулю:

$$L_j = 0$$
(1.11)

Очевидно, что учет "деформирования" внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней среды (1.8) и граничных условий (1.9), (1.10). Кроме этого, из приведенных соотношений следует, что посредством градиента деформаций $\xi_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ квазистатические электрическое и магнитное поля взаимосвязаны. Это значит, что если в пьезоэлектрическую среду излучать электроупругую волну конечной амплитуды, то в среде индуцируется также магнитное поле.

Наряду с граничными условиями (1.9) - (1.11) для локализованных у по-

верхности раздела волн должны удовлетворяться также условия затухания по глубине полупространств всех волновых характеристик .

2. Пусть на вход пьезодиэлектрической среды падает монохроматическая волна конечной амплитуды. Нелинейность уже не допускает простых периодических волновых решений и приводит к последовательному возбуждению временных гармоник падающей волны $f_n = A_n(\xi, \tau) \exp i(\omega_n t - k_n r)$. При этом амплитуды генерационных гармоник будут медленно изменяющимися функциями времени и направления распространения волны ($\xi = \epsilon r$, $\tau = \epsilon t$). Здесь ϵ физический малый параметр, которым может быть мера понижения первичного волнового сигнала на расстоянии длины волны. Исходя из вышесказанного и учитывая, что нелинейность кристаллов мала, при решении задачи о распространении волн конечной амплитуды достаточно ограничиться приближением заданного волнового поля (падающего волнового сигнала).

Воспользуемся методом возмущений, представляя искомые величины электромагнитоупругого поля в виде

$$F(x_j, t, \xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n F_n(x_j, t, \xi, \tau) \quad (2.1)$$

Не нарушая общности решения, за направлением распространения волны принята координатная ось Ox_1 (т.е. $\xi = \epsilon x_1$). В нелинейные волновые уравнения и граничные условия эти изменения входят посредством замены производных по x_1 и по t

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.2)$$

Подставляя разложение искомых величин (2.1) в уравнения электромагнитоупругости (1.1), (1.2), (1.7) и в граничные условия (1.9) - (1.11) с учетом материальных соотношений (1.3) - (1.5), (1.8), преобразований (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях ϵ , в первом приближении получим линейную однородную краевую задачу электромагнитоупругости. Известно, что для пьезодиэлектрических кристаллов класса *бтмт* задачи плоско - деформированного упругого поля и магнитного поля разделяются от задачи антиплоской деформации, которая электроактивна. Это означает, что в данной среде в качестве волнового сигнала можно возбуждать один из указанных волновых полей.

В дальнейшем вместо обозначений декартовых координат x_1, x_2, x_3 для удобства будем пользоваться обозначениями x, y, z .

Затухающие по глубине граничащих полупространств решения полученных краевых задач, с учетом слабой нелинейности пьезокристалла, запишутся в виде

$$u_0(x, y, t, \xi \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{0m}(\xi \tau) \left[\exp(-mv_1 y) - (v_1 v_2)^{1/2} \exp(-mv_2 y) \right] \times \\ \times \exp(im\varphi) + k.c. \\ v_0(x, y, t, \xi \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} -i U_{0m}(\xi \tau) \left[v_1 \exp(-mv_1 y) - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{1/2} \exp(-mv_2 y) \right] \times \\ \times \exp(im\varphi) + k.c. \quad (2.3)$$

$$w_0(x, y, t, \xi \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{0m}(\xi \tau) \exp(-mk\alpha y) \exp(im\varphi) + k.c.$$

$$\Phi_0(x, y, t, \xi \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_{15}}{e_{11}} W_{0m}(\xi \tau) \left[\exp(-mk\alpha y) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} \exp(-mky) \right] \exp(im\varphi) + k.c. \quad (2.4)$$

$$\Phi_0^{(0)}(x, y, t, \xi \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_{15}}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} W_{0m}(\xi \tau) \times \\ \times \exp(mky) \exp(im\varphi) + k.c.$$

Потенциальные, затухающие по глубине полупространств сигнальные магнитные поля не существуют. А это значит, что в данной среде невозможно возбуждать локализованное у поверхности раздела сред высокочастотное потенциальное магнитное поле. Однако из линейной теории электроупругости известно, что электрическое поле в пьезодизэлектрике индуцирует вихревое магнитное поле, определяющееся формулой [3]

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_0}{\partial t}$$

Под индукцией \vec{D}_0 понимается заданное значение \vec{D} , определяемое из задачи электроупругости, вихревая часть магнитоупругого поля в акустоз-электрической задаче имеет порядок $(v^2/c_0^2) \times |\nabla \Phi|$ и всегда пренебрежимо мала.

В соотношениях (2.3) и (2.4) использованы обозначения

$$\alpha = \left[1 - \frac{v_B^2}{c_t^2} \right]^{1/2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} \frac{\chi^2}{1 + \chi^2} \\ v_1 = \sqrt{1 - v_R^2 / c_t^2}, \quad v_2 = \sqrt{1 - v_R^2 / c_{1r}^2} \quad (2.5) \\ c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho} (1 + k^2), \quad c_{1r}^2 = \frac{c_{66}}{\rho}, \quad c_t^2 = \frac{c_{11}}{\rho}$$

$\varphi(x, t) = kx - \omega t$ - фазовая функция.

В случае "электрически закрытой" границы (металлизированная поверхность пьезоэлектрика) во внешней вакуумной среде отсутствует также электрическое поле (т.е. $\Phi_0^{(0)}(x, y, t, \xi, \tau) = 0$), а внутри пьезодиэлектрика электрическое поле описывается функцией

$$\Phi_0^{(0)}(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} W_{0n}(\xi, v) [\exp(-m\alpha ky) - \exp(-mky)] \times \\ \times \exp(im\varphi) + k. c.$$

Во втором приближении волновые уравнения электромагнитоупругости получаются в виде

$$L_1[u_1, v_1] = -2c_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} + F_1[u_0, v_0, w_0, \Phi_0] \quad (2.6)$$

$$L_2[u_1, v_1] = -2c_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \xi} - (c_{11} - c_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t \partial \tau} + F_2[u_0, v_0, w_0, \Phi_0]$$

$$L_3[w_1, \Phi_1] = -2c_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi} - 2e_{15} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial \xi} + 2\rho \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial \tau} + F_3[u_0, v_0, w_0, \Phi_0] \quad (2.7)$$

$$L_4[w_1, \Phi_1] = -2e_{15} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \xi} + 2\epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial \xi} + F_4[u_0, v_0, \Phi_0]$$

$$L_5[\Phi_1^{(0)}] = -2 \frac{\partial^2 \Phi_0^{(0)}}{\partial x \partial \xi} + F_5[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Phi_0^{(0)}]$$

$$L_6[\Psi_1] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x \partial \xi} + F_6[u_0, v_0, \Psi_0] \quad (2.8)$$

$$L_7[\Psi_1^{(0)}] = -2 \frac{\partial^2 \Psi_0^{(0)}}{\partial x \partial \xi} + F_7[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Psi_0^{(0)}]$$

Здесь $L_k[*]$ - линейные волновые операторы, а $F_i[*]$ - нелинейные операторы.

На деформированной поверхности раздела двух сред $y = 0$ искомые величины волнового поля удовлетворяют неоднородным граничным условиям

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{c_{11}}{c_{12}} \frac{\partial v_1}{\partial y} = - \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + B_1[u_0, v_0, w_0, \Phi_0] \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = - \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + B_2[u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}] \quad (2.9) \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = B_3[u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}]$$

$$\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial y} = B_4[u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial \xi} + B_5[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Phi_0, \Phi_0^{(0)}]$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x} = B_6[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Psi_0, \Psi_0^{(0)}] \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1^{(0)}}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial \xi} + B_7[u_0^{(0)}, v_0^{(0)}, \Psi_0, \Psi_0^{(0)}]$$

здесь также $B_x[*]$ - нелинейные операторы и выражения соответствующих слагаемых не приводятся из-за их громоздкости.

В практике обычно используются или рэлеевский электроупругий сигнал $\{u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), 0, \Phi_0(x, y, t)\}$, или чисто сдвиговой электроупругий волновой сигнал $\{0, 0, w_0(x, y, t), \Phi_0(x, y, t)\}$ (волны Гуляева - Блюстейна). В случае пьезокристалла класса *bmm*, в указанном срезе xOy , рэлеевское волновое поле не электроактивное, то есть имеем

$$u_0(x, y, t) \neq 0, \quad v_0(x, y, t) \neq 0, \quad w_0(x, y, t) = 0$$

$$\Phi_0(x, y, t) = 0, \quad \Phi_0^{(0)}(x, y, t) = 0$$

$$\Psi_0(x, y, t) = 0, \quad \Psi_0^{(0)}(x, y, t) = 0$$

Тогда, если в первом приближении имеется только одна рэлеевская волна, в соотношениях (2.6) - (2.11), а также в следующих приближениях ($m \geq 1$) будем иметь:

$$F_k[u_m, v_m, 0, 0] = F_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2)$$

$$F_j[u_m, v_m, 0, 0] = 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$B_k[u_m, v_m, 0, 0] = B_k^{(1)}[u_m, v_m], \quad (k = 1, 2)$$

$$B_j[u_m, v_m, 0, 0] = 0, \quad (j = 3, 4, 5, 6, 7)$$
(2.12)

С учетом (2.12) из (2.7), (2.8) и (2.10), (2.11), очевидно, что начальное плоско-деформированное волновое поле не возбуждает высшие гармоники антиплоского электроупругого, а также магнитоупругого полей. Происходит только последовательное возбуждение высших гармоник чисто упругого плоско-деформированного волнового поля в плоскости изотропии пьезокристалла xOy . Исследование данной задачи можно найти в работах [4,5].

В случае чисто сдвигового электроупругого волнового сигнала:

$$u_0(x, y, t) = 0, \quad v_0(x, y, t) = 0$$

$$\Psi_0(x, y, t) = 0, \quad \Psi_0^{(0)}(x, y, t) = 0$$

а $w_0(x, y, t)$, $\Phi_0(x, y, t)$ и $\Phi_0^{(0)}(x, y, t)$ определяются соотношениями (2.4). Существует также пренебрежимо малое вихревое поле внутри и вне пьезополупространства. Тогда в уравнениях и граничных условиях имеем:

$$F_k(0, 0, w_m, \Phi_m) = F_k^{(2)}(w_m, \Phi_m)$$

$$F_j(0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(0)}) = 0$$

$$B_k(0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(0)}) = B_k^{(2)}(w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(0)})$$

$$B_j(0, 0, w_m, \Phi_m, \Phi_m^{(0)}) = 0$$
(2.13)

где также $k = 1, 2$ и $j = 3, 4, 5, 6, 7$.

Генерация высших гармоник сдвиговой электроупругой волны происходит из-за самовоздействия волнового сигнала (первичной гармоники). Условие отсутствия вековых членов в решении, получается из граничных условий краевой задачи электроупругости (2.7) и (2.10):

$$M_{ij}^0 C_j(\varepsilon, \tau) = A_i(W_{0,\xi}, W_{0,\tau})$$
(2.14)

Учитывая, что первичным электроупругим полем обеспечивается выполнение условия $\det \|M_{ij}^0\| = 0$, из условия существования нетривиального решения получаем дифференциальное уравнение, описывающее характер изменения амплитуд высших гармоник сдвиговой электроупругой волны

$$a_0 W_{0m,\xi} + W_{0m,\tau} = 0 \quad \text{для } m \geq 1$$
(2.15)

где $a_0 = \frac{c_\chi^2}{v_B} \left(1 - \alpha^2 \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0} \right)$ - скорость изменения амплитуды волны (групповая скорость), $\alpha = \chi^2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_0}$, $v_B = c_i [1 - \alpha^2]^{1/2}$ - скорость поверхностной волны Гуляева - Блюстейна.

При падении линейного волнового сигнала, для комплексных амплитуд гармоник $W_{0m}(\xi, \tau)$ входными условиями будут

$$\operatorname{Re}[W_{01}(0, 0)] = A_0, \quad \operatorname{Im}[W_{01}(0, 0)] = 0$$

$$\operatorname{Re}[W_{0m \geq 2}(0, 0)] = 0, \quad \operatorname{Im}[W_{0m \geq 2}(0, 0)] = 0$$
(2.16)

С учетом этого для комплексных амплитуд получаем

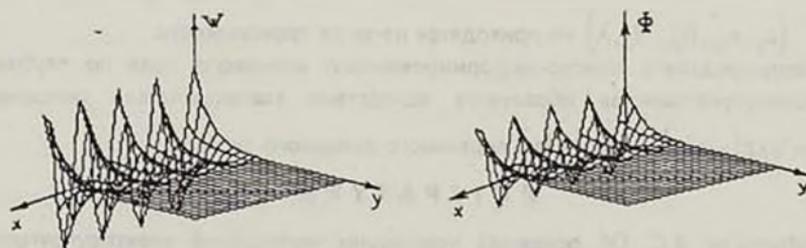
$$W_{01}(\xi, \tau) = A_0 \exp(\alpha_0 \tau - \xi), \quad \text{Im}[W_{01}(\xi, \tau)] = 0 \quad (2.17)$$

$$W_{0m}(\xi, \tau) = 0 \quad \text{при } m \geq 2$$

Затухающие по глубине граничащих полупространств антиплоское электроупругое поле получается в виде

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t, \xi, \tau) &= A_0 \exp(\alpha_0 \tau - \xi) \left[\cos(kx - \omega t) + \alpha \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_0}{\epsilon_{11} + \epsilon_0} y \sin(kx - \omega t) \right] \times \exp(-kcy) \\ \Phi(x, y, t, \xi, \tau) &= \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}} A_0 \exp(\alpha_0 \tau - \xi) \left[\cos(kx - \omega t) \left[\exp(-kcy) + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} \exp(-ky) \right] + \right. \\ &+ \left. \left[\exp(-ky) + \alpha \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} \exp(-kcy) \right] y \sin(kx - \omega t) \right] \\ \Phi^{(01)}(x, y, t, \xi, \tau) &= \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}} A_0 \exp(\alpha_0 \tau - \xi) \exp(ky) \left[\cos(kx - \omega t) - y \sin(kx - \omega t) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Очевидно, что возникает запаздывающая электроупругая волна, отстающая из основного волнового сигнала фазой на $\frac{3}{2}\pi$ и неоднородность волны в глубь полупространства имеет иной характер по сравнению с основным волновым сигналом (фиг. 1). Запаздывающая волна имеет максимальную амплитуду не на поверхности $y=0$, а на глубине $y = \frac{\lambda}{2\pi\alpha}$ для каждой волны длиной λ .



фиг. 1

Из (2.13) следует, что в этом случае генерируется также плоско-деформированное волновое поле. Во первых, здесь возникает акустическое детектирование (нераспространяющаяся волна), обусловленное взаимодействием гармоник электроупругой сдвиговой волны

$$u_{01}(x, y, t, \xi, \tau) = 0$$

$$v_{01}(x, y, t, \xi, \tau) = R_0^2 [A_1 \exp(-2\alpha ky) + B_1 \exp(-2\alpha ky)]$$

где

$$A_1 = 1 + \alpha^2 - 2 \frac{c_{66}}{c_{11}} + (1 - \alpha^2) \frac{\epsilon_{13}^2}{c_{66}\epsilon_{11}}$$

$$\bar{B}_i = 4 \frac{e_{13}^2}{c_{11}\epsilon_{11}} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon_{11}}, \quad \bar{R}_0^2 = \frac{2\pi A_0^2}{\lambda}$$

Локализованное у поверхности раздела $y=0$ распространяющееся плоско-деформированное поле (волна Рэлея) определяется из краевой задачи (2.6), (2.9) с учетом (2.13) и (2.18):

$$u_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n}^{(1)} \exp(-n\alpha ky) + A_{1n}^{(2)} \exp(-nky) + A_{1n}^{(3)} \exp(-(n+\alpha-1)ky) + A_{1n}^{(4)} \exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)] + \sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} A_{1n}^{(5)} \exp((n\alpha-\alpha-1)ky) \exp(in\varphi) + k.c.$$

$$v_1(x, y, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}^{(1)} \exp(-n\alpha ky) + B_{1n}^{(2)} \exp(-nky) + B_{1n}^{(3)} \exp(-(n+\alpha-1)ky) + B_{1n}^{(4)} \exp((-n\alpha+\alpha-1)ky)] + \sum_{n=2}^{1+\frac{1}{\alpha}} B_{1n}^{(5)} \exp((n\alpha-\alpha-1)ky) \exp(in\varphi) + k.c.$$

где выражения коэффициентов $A_{mn}^{(i)}(c_y, e_{ky}, \delta_{jk}, A_0, \lambda)$ и $B_{mn}^{(i)}(c_y, e_{ky}, \delta_{jk}, A_0, \lambda)$ не приводятся из-за их громоздкости.

Неоднородность плоско-деформированного волнового поля по глубине пьезополупространства образуется вследствие взаимодействия основных форм $\exp(-\alpha ky)$ и $\exp(-ky)$ первичного волнового сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. Об основных уравнениях нелинейной электроупругости пьезоэлектрического диэлектрика. - Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, № 4, с. 41-51.
2. Maugin G.A. Nonlinear electromechanical effects and application. - World Sci. Publ., Singapore, 1985.
3. Балакирев М.К., Гулинский И.А. Волны в пьезокристаллах. - Новосибирск. Наука, 1982.
4. Kalyanasundaram N. Nonlinear surface acoustic waves on an isotropic solid. Int. J. Eng. Sci., 1981, v.19, № 1, pp. 279-286.

5. *Lardner R.W.* Nonlinear surface acoustic waves on an elastic solid of general anisotropy.- J. Elast., 1986, v.16, № 1, pp. 63-75.
6. *Nelson D.F.* Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric and pyroelectric crystals. - J. Acoust. Soc. Amer., 1978. v. 63. pp. 1738-1748.

Институт Механики АН Армении

Поступила в редакцию
19.12.1992