ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 48, № 1, 1995 Механика

О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТОКОНЕСУЩЕЙ ПЛАСТИНКИ

ВАРДАНЯН Л. В.

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱԿԻՐ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՍՏԱՏԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԼԱՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ուսումնասիրվում է հոսանքակիր ուղղանկյուն սալի ստատիկ կայունության վրա սկզբնական լարվածային վիճակի ազդեցությունը։

Տարբեր եզրային պայմաններում ստացված են էլեկտրական հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքները։

Ցույց է տրված, որ սկզբնական լարվածային վիճակի հաշվի առնելը բերում է էլեկտրական հոսանքի խտության մինիմալ կրիտիկական արժեքի աննշան փոքրացման։

L. V. VARDANIAN

ABOUT THE INITIAL STRESSES INFLUENCE ON STATIC STABILITY OF THE RECTANGULAR CURRENT-CARRING PLATE

В настоящей работе рассматривается влияние начального напряженного состояния на статическую устойчивость прямоугольной токонесущей пластинки. При различных условиях найдены критические значения плотности тока.

Показано, что учет начального напряженного состояния приводит к незначительному снижению минимальной критической плотности тока, при которой пластинка теряет устойчивость.

1. Пусть упругая электропроводящая прямоугольная пластинка толщиной $2h$, шириной a и длиной b расположена в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) так, что срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью $(x_1 0 x_2)$.

В пластинке по направлению $0x_1$ — распределенный электрический ток плотностью J_0.

Для начального напряженного состояния пластинки, обусловленного сторонним током, принимается следующий модельный вариант:

$$u_1^0 \to 0 \text{ при } x_1 \to \pm\infty$$

$$\sigma_{22}^0 \to 0 \text{ при } x_2 \to \pm\infty$$

Тогда получим

$$\sigma^0_{11}=\nu_3\sigma^0_{33}$$

$$\sigma^0_{22}=0$$

$$\sigma^0_{ik}=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma^0_{33}=\frac{2\pi}{c^2}J_0(x_3^2-h^2)$$

где ν_3—поперечный коэффициент Пуассона.

Полагая, что вследствие возмущения пластинки возмущение магнитного поля является малым, получаем следующее уравнение магнитостатики [1]:

$$\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x_3^2}=0 \tag{1.2}$$

Задача рассматривается в рамках гипотезы Кирхгофа.

При малых упругих деформациях [3] условие непротекания тока приводит к следующим граничным условиям:

$$h_1=\frac{4\pi}{c}J_0 w \text{ при } x_3=\pm h \tag{1.3}$$

Согласно (1.1) для рассмотрения задачи устойчивости токонесущей пластинки приходим к следующему исходному уравнению возмущенного состояния пластинки [2]:

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 w+\frac{2J_0}{c}\int_{-h}^{h}x_3\frac{\partial h_2}{\partial x_1}dx_3-$$

$$-\frac{8\pi h}{c^2}J_0^2\left|w+\frac{h^2}{3}\left(\frac{h^2\nu_3}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Delta w-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\nu_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right|=0 \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим задачу, когда прямоугольная пластинка шарнирно закреплена по всему контуру

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0,\quad x_1=b$$

$$w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0 \quad \text{при} \quad x_2=0,\quad x_2=a \tag{2.1}$$

Тогда, решения уравнений (1.2) и (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (2.1), представляются следующим образом:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\alpha_m x_1\sin\beta_n x_2,\qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{b}$$

$$h_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g_{mn}(x_3)\sin\alpha_m x_1\sin\beta_n x_2,\qquad \beta_n=\frac{n\pi}{a} \tag{2.2}$$

Подставляя h_2 из (2.2) в (1.2) и (1.3), приходим к следующим уравнениям и граничным условиям для определения функции $g_{mn}(x_3)$:

$$\frac{d^2 g_{mn}}{dx_3^2}(x_3)-k_{mn}^2 g_{mn}(x_3)=0, \qquad g_{mn}(\pm h)=\frac{4\pi}{c}J_0 w_{mn} \tag{23.}$$

где $k_{mn}^2=\alpha_m^2+\beta_n^2$.

Решая (2.3), найдем

$$g_{mn}(x_3)=\frac{4\pi}{c}J_0 w_{mn}\frac{\mathrm{ch}(k_{mn}x_3)}{\mathrm{ch}(k_{mn}h)} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), найдем h_2, и затем определим компоненты h_1, h_3 возмущенного магнитного поля.

Предполагая $k_{mn}^4h^4\ll 1$, получим следующее приближенное представление для интеграла, входящего в (1.4):

$$\int_{-h}^{h} x_3\frac{\partial h_3}{\partial x_2}dx_3\approx-\frac{8\pi h^3}{3c}J_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{2h^2}{5}\Delta^2 w\right) \tag{2.5}$$

Подставляя w из (2.2) в уравнение (1.4), с учетом (2.5) получим уравнение, с помощью которого может быть определено значение критической плотности тока.

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}k_{mn}^4-p_{mn}\left[1-\frac{h^2\beta_n^2}{3}+\frac{4h^4k_{mn}^4}{15}+\frac{h^2\alpha_m^2\nu_2}{3}\left(1+\frac{h^2k_{mn}^2}{5}\right)\right]=0 \tag{2.6}$$

где $p_{mn}=\frac{4\pi h}{c^2}J_{0mn}^2$

Если пренебречь членами порядка $h^4k_{mn}^4$, то для определения минимальной критической плотности электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость, получим

$$p_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}k_{11}^4\left(1-\frac{h^2\beta_1^2}{3}+\frac{h^2\alpha_1^2\nu_2}{3}\right)^{-1} \tag{2.7}$$

Формула (2.7) показывает, что учет начального напряженного состояния (третий член в скобке) приводит к незначительному снижению минимальной критической плотности тока.

3. Допустим, что пластинка шарнирно закреплена по длине и подвижно защемлена по ширине

$$w=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \quad \text{при} \quad x_1=0, \quad x_1=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}=0 \quad \text{при} \quad x_2=0, \quad x_2=a \tag{3.1}$$

Тогда, решения уравнений (1.2) и (1.4), удовлетворяющие граничным условиям (1.3), (3,1), представляются следующим образом:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\alpha_m x_1\cos\beta_n x_2,\qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{b}$$

$$h_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_{mn}(x_3)\sin\alpha_m x_1\cos\beta_n x_2,\qquad \beta_n=\frac{n\pi}{a} \tag{3.2}$$

Здесь, как и во втором пункте, находим ту критическую плотность электрического тока, при которой пластинка теряет устойчивость. Эта плотность также определяется формулой (2.7).

4. Если пренебречь членами порядка $h^4k^4_{mn}$, то из (2.6) с учетом (2.2) получим следующее модельное уравнение для рассмотрения задачи устойчивости токонесущей пластинки:

$$D\Delta^2 w-p\left[w+\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-\nu_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)\right]=0 \tag{4.1}$$

$$\text{где}\quad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\qquad p=\frac{4\pi h}{c^2}J_0^2$$

Рассмотрим случай, когда пластинка шарнирно закреплена по длине края, а по ширине жестко защемлена:

$$w=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0\quad \text{при}\quad x_1=0,\quad x_1=b$$

$$w=0,\qquad \frac{dw}{dx_2}=0\quad \text{при}\quad x_2=0,\quad x_2=a \tag{4.2}$$

Представим решения уравнения (4.1), удовлетворяющие граничным условиям (4.2), в виде

$$w=w_m(x_2)\sin\alpha_m x_1 \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.1), получим следующие уравнения и граничные условия для определения $w_m(x_2)$:

$$\frac{d^4 w_m}{dx_2^4}-\left(2\alpha_m^2+\frac{ph^2}{3D}\right)\frac{d^2 w_m}{dx_2^2}+\left[\alpha_m^4-\frac{p}{D}\left(1+\frac{h^2\alpha_m^2\nu_3}{3}\right)\right]w_m=0 \tag{4.4}$$

$$w_m=0,\qquad \frac{dw_m}{dx_2}=0,\quad \text{при}\quad x_2=0,\quad x_2=b \tag{4.5}$$

При закреплении пластинки по ширине, два корня, выведенного из (4.4) характеристического уравнения, являются мнимыми [4]. Следовательно, получим общие решения уравнения (4.4) в виде:

$$w_m(x_2)=C_1\operatorname{ch}\lambda_1 x_2+C_2\operatorname{sh}\lambda_1 x_2+C_3\cos\lambda_2 x_2+C_4\sin\lambda_2 x_2 \tag{4.6}$$

$$\text{где}\quad \lambda_1=\sqrt{\alpha_m^2+\frac{ph^2}{6D}+\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)}} \tag{4.7}$$

$$\lambda_2=\sqrt{\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2 h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)}-\alpha_m^2-\frac{ph^2}{6D}}$$

Пользуясь граничными условиями (4.5) из (4.6), находим

$$(y\,\mathrm{th}\,x-x\,\mathrm{tg}\,y)(y\,\mathrm{tg}\,y+x\,\mathrm{th}\,x)=0 \tag{4.8}$$

$$\text{где}\quad x=\frac{\lambda_1 a}{2},\quad y=\frac{\lambda_2 a}{2}$$

Из (4.7) имеем

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{p}{D}\left(1+\frac{\alpha_m^2 h^2}{3}(1+\nu_3)+\frac{ph^4}{36D}\right)}$$

$$x^2-y^2=\frac{a^2}{2}\left(\alpha_m^2+\frac{ph^2}{6D}\right) \tag{4.9}$$

Пользуясь уравнениями (4.8) и (4.9), определим критическую плотность электрического тока.

5. Предположим что,

$$p\ll\frac{6D\pi^2}{h^2a^2}\left(\frac{ma}{b}\right)^2 \tag{5.1}$$

Тогда, из (4.8) и (4.9) получим

$$p=k\frac{\pi^4 D}{a^4}\left(\frac{ma}{b}\right)^4$$

$$y\,\mathrm{tg}\,y+x\,\mathrm{th}\,x=0,\quad x^2-y^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi ma}{b}\right)^2 \tag{5.2}$$

В (5.2)

$$k=\frac{4}{\pi^4}\left(\frac{b}{ma}\right)^4(x^2+y^2)^2 \tag{5.3}$$

Согласно [4], при $b/ma=0{,}662$ получаем $K=6{,}97$. Тогда, для минимального критического тока, при котором пластинка теряет устойчивость, получим

$$p_{\text{кр}}=15{,}89\frac{D\pi^4}{a^4} \tag{5.4}$$

При принятом допущении (5.1) имеем

$$\frac{h}{a}\ll 0{,}296 \tag{5.5}$$

Условие (5.5) приемлемо в теории пластин и поэтому условие (5.1) вполне оправдано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.- М.: Наука, 1977. 272 с.
2. **Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.** Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин.- Ереван: АН Армении, 1992. 123 с.
3. **Белубекян М. В.** О статической устойчивости токонесущей пластинки. -Докл. АН АрмССР, 1982, т. 74, №5, с. 208—212.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем.- М.: Физматгиз, 1963. 879 с.

Армгоспединститут им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию 8.06.1993