

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

Саркисян А.В.

Ա. Վ. Սարկիսյան

Այլիքների տարածումը հեղուկ պարունակող ջերմաստճազակալս գլանային թաղանթում

Ներուկ պարունակող ջերմաստճազակալս գլանային թաղանթում այլիքների տարածման խնդրի լուծման համար դիտարկված են թաղանթ-հեղուկ, թաղանթ-ջերմաստճազակալս համակարգերը, որոնց համար ստրագված են ստրատայրոթյուններ այլիքի տարածման արագության համար: Ընդհանրագված է ժողովակրո րանաճնը ջերմաստճազակալս դաշտի դեպքում:

Sarkisian A. V.

The Waves Propagation in Thermomechanic Cylindrical Shell with the Fluids.

Для решения задачи распространения волн в термоупругой цилиндрической оболочке, наполненной идеальной жидкостью, рассмотрены системы оболочка-жидкость и оболочка-температура, для которых получены выражения скорости распространения волны. Обобщена формула Жуковского на случай температурного поля.

1. Рассматривается распространение осесимметричных волн бесконечно длинной изотропной цилиндрической оболочки (с радиусом R , плотностью ρ , толщиной h , модулем Юнга E), наполненной идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 . Предполагается, что колебания цилиндра сопровождаются выделением теплоты, что, в свою очередь, создает тепловые напряжения (тепловая связанная задача).

Пусть температурное поле в оболочке изменяется по следующему закону [1]:

$$T = \Theta_1 + z\Theta_2 \tag{1.1}$$

Уравнения движения оболочки имеют вид [2]

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{T_2}{R} + T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

где P - давление жидкости, T_1, T_2 - усилия, M_1 - изгибающий момент, T_0 - начальное усилие срединной поверхности оболочки, u, w - перемещения срединной поверхности.

Принимая во внимание (1.1), уравнения теплопроводности будут иметь следующий вид [3,4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \Theta_1 + \eta \chi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial t} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \left[\frac{12\chi}{h^2} + \frac{6k^*}{c_p \rho h} \right] \Theta_2 - \eta \chi \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где χ - коэффициент температуропроводности, k^* - коэффициент теплообмена поверхности тела, c_p - удельная теплоемкость, $\eta = \frac{3\lambda + 2\mu}{c_p \rho \chi} \alpha T$, α - коэффициент температурного расширения, λ, μ - коэффициенты Лямэ.

Двумерное уравнение движения жидкости и выражение для давления известно из [5]

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \\ P &= \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где φ - функция потенциала, $\Delta [] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ - оператор Лапласа.

Граничное условие на внутренней поверхности цилиндра будет

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=h} = - \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.2)-(1.5) ищется в виде

$$\begin{aligned} u &= A \exp i(\omega t - kx) \\ w &= B \exp i(\omega t - kx) \\ \Theta_1 &= C_1 \exp i(\omega t - kx) \\ \Theta_2 &= C_2 \exp i(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где ω - частота, k - волновое число, A, B, C_1, C_2 - неизвестные постоянные.

Учитывая граничное условие (1.5) из (1.4) и (1.6), для давления получаем следующее выражение:

$$P = \rho_0 B \omega^2 \frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)} \exp(i\omega t - kx) \quad (1.7)$$

где $I_0(kR)$, $I_1(kR)$ - функции Бесселя [6].

Учитывая закон Дюамеля-Неймана [1], гипотезу Кирхгофа-Лява [2], а также выражение для давления (1.7), в уравнениях (1.2) усилия T_1 и T_2 , изгибающий момент M_1 , выражая через компоненты перемещений, получим систему

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha(1+\nu) \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \right] - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ & \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Eh^3 \alpha}{12(1-\nu)} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \left[\frac{w}{R} + \right. \\ & \left. + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \Theta_1(1+\nu) \right] - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_0 B \omega^2 \frac{I_0(kR)}{kI_1(kR)} \exp i(\omega t - kx) = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Таким образом, для решения данной задачи необходимо решить системы (1.3), (1.8). Из-за громоздкости дисперсионного уравнения шестого порядка относительно частоты оно не приводится, а его анализ можно провести только численно, поэтому здесь довольствуемся только частными случаями.

2. Рассмотрим систему оболочка-жидкость, предполагая отсутствие теплового эффекта. В этом случае получится биквадратное уравнение относительно

отношения $\frac{\nu}{c}$, где $\nu = \frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость распространения волны,

$$c^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Таблица 1

$\frac{1}{kR}$	$\left(\frac{\nu}{c}\right)_1$	$\left(\frac{\nu}{c}\right)_2$	$\left(\frac{\nu}{c}\right)_3$
1	0.2189	1.00180	0.2284
2	0.2192	1.00230	0.2299
3	0.2193	1.00243	0.2304
5	0.2194	1.00248	0.2305
10	0.2195	1.00250	0.2306

В табл. 1 для этого случая для данных значений $1/kR$ указаны соотношения $\left(\frac{v}{c}\right)_1$ и $\left(\frac{v}{c}\right)_2$. Для вычисления, для явил в малых частотах

$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\right)$ для соотношения $\frac{v}{c}$ будем иметь:

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1/k^2 R^2 + h^2 k^2 / 12(1-v^2) + T_0 / Eh}{1 + \frac{\rho_0 I_0(kR)}{\rho I_1(kR)} \frac{1}{kh}} \quad (2.1)$$

которому соответствует в табл. 1 отношения $\left(\frac{v}{c}\right)_2$.

3. Для выяснения влияния температур рассмотрим систему оболочка - температура, довольствуясь безмоментной постановкой задачи. В этом случае (при отсутствии жидкости), в предположении малости продольного инерционного члена, из (1.3) и (1.8) задача сводится к решению данной системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{T_2}{R} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \Theta_1 + \eta \chi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial t} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

из которой получится кубическое дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} [1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu)] \omega^3 - i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) \omega^2 - \\ - \frac{E}{\rho R^2} (1 + 2\alpha \eta \chi) \omega + \frac{E}{\rho R^2} i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При отсутствии связанности задачи для частот имеем

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \pm \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \omega_3 &= i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) / (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Удобнее приближенные корни уравнения (3.2) искать в виде, учитывающей малость связанности (η). Тогда, если решение (3.2) представить в виде

$$\left(\omega - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} + a_1 \right) \left(\omega + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} + a_2 \right) \frac{\left(\omega - i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) + a_3 \right)}{1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu)} = 0 \quad (3.4)$$

где a_1 - малые величины, характеризующие малость связанности, сравнивая (3.2) и (3.4), для a_1 получим

$$\operatorname{Re} a_{1,2} = \frac{\pm \frac{1}{2} \frac{E}{\rho R^2} \alpha \eta \chi (1 - \nu) (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))}{\left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right)^2 + \frac{E}{\rho R^2} (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))^2} \quad (3.5)$$

a_3 - мнимое число, характеризующее процесс затухания.

Следовательно, для изгибной скорости распространения волны получим

$$v = \pm \frac{1}{kR} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left[1 - \frac{\frac{1}{2} \frac{E}{\rho R^2} \alpha \eta \chi (1 - \nu) (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))}{\frac{E}{\rho R^2} (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))^2 + \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right)^2} \right] \quad (3.6)$$

4. Известно выражение скорости пульсовой волны [7,8,9]. Обобщим его на случай наличия теплопередачи.

Предполагается, что есть только усилие T_2 , которое в предположении $T_1 = 0$ дает

$$T_2 = Eh \left(\frac{w}{R} - \alpha \Theta_1 \right) \quad (4.1)$$

Уравнение теплопроводности в этом случае согласно (1.3) имеет вид

$$\left[1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu) \right] \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \Theta_1 + \eta \frac{\chi}{R} (1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

Давление жидкости по одномерной модели определяется из [10]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{2\rho_0}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Из уравнений движения оболочки (1.8), из соотношения (4.3) и уравнения теплопроводности (4.2), решение задачи сводится к решению данной системы

$$Eh \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} \right] = 2\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

$$\left[1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu) \right] \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \Theta_1 + \frac{\eta \chi}{R} (1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

В этом случае имеем следующее кубическое дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \left[1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu) \right] \omega^3 - i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) \omega^2 - \frac{Ehk^2}{2\rho_0 R} (1 - 2\alpha \eta \chi \nu) \omega + \\ + \frac{Ehk^2}{2\rho_0 R} i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

При отсутствии тепловыделения для частот имеем

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} = \pm k \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}} \\ \omega_3 = i \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right) / \left[\alpha \eta \chi (1 + \nu) + 1 \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для скорости распространения волны будем иметь

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}} \quad (4.7)$$

(4.7) получена в [9] и носит название формулы Жуковского.

Обобщим эту формулу на случай температурного поля. Корни уравнения (4.5) также ищем в виде предыдущего пункта. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательное выражение для скорости распространения волн

$$v = \pm \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 R}} \left[1 - \frac{Ehk^2}{4\rho_0 R} \frac{\alpha \eta \chi (1 + 3\nu) (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))}{\frac{Ehk^2}{2\rho_0 R} (1 + \alpha \eta \chi (1 + \nu))^2 + \left(\chi k^2 + \frac{2k^*}{c_p \rho h} \right)^2} \right] \quad (4.8)$$

Как видно из приведенной формулы (4.8), скорость зависит от волнового числа, то есть в этом случае наблюдается дисперсия.

Формула (4.8) обобщает известную формулу Жуковского, принятую в биомеханике как скорость распространения пульсовой волны.

Л и т е р а т у р а

1. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. - М.: Физматгиз 1963.
2. *Новожилов В. В.* Теория тонких упругих оболочек.-Л.: Суд-промгиз, 1962.
3. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. - ПММ, 1960, т. 24 в. 2.
4. *Новоцкий В.* Динамические задачи термоупругости. - М.: Мир, 1970.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I. - М.: Наука, 1973.
6. *Корнев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. - М.: Физматгиз, 1960.
7. *Каро, Педли, Шротер, Сид.* Механика кровообращения. - М.: Мир, 1981.
8. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир, 1983.
9. *Рашевски Н.* Некоторые медицинские аспекты математической биологии. - М.: Мир, 1966.
10. *Амбарцумян С. А., Мовсисян Л. А.* К вопросу распространения пульсовой волны. -Механика полимеров. 1978, № 4.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26. 11. 1993