

РАЗВИТИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СКОРОСТЕЙ
В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ С ДВИЖУЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

Мнацаканян Р.Ж.

Ռ. Ժ. Մնացականյան

Սրահաշրջանների կառուցման պրոֆիլի զարգացումը թուրման պարբեր հարթ խողովակում

Ուսումնասիրվում է մառնիկ հեղուկի շարժման զարգացումը շարժական պարբեր հարթ խողովակում, երբ խողովակի սկզբնական կտրվածքում հիմնական հոսքի աղաղությունների պրոֆիլն ունի կամայական տեսք: Գրեկան են աղաղության, ճնշման և շփման ուժի փոփոխման օրենքները խողովակի սկզբնական և հաստատված հարվածներում, կախված խողովակի սկզբնական կտրվածքում աղաղությունների բաշխման պրոֆիլից և պարբեր աղաղությունից:

R.Zh. Mnatsakanyan

On the Development of the Arbitrary Profile of Velocities in the Flat Pipe with Moving Wall.

Рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля продольных скоростей основного потока жидкости.

Полученные результаты показывают, что выбором скоростей подающей стенки и начального профиля продольных скоростей можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках трубы.

1. За последние годы о развитии течения вязкой жидкости между параллельными (подвижными, пористыми) стенками опубликован ряд работ, в которых, в основном, рассмотрены случаи, когда поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении линейный профиль.

В настоящей работе рассматривается развитие течения вязкой жидкости в плоской трубе с подвижной стенкой на случай начального произвольного профиля и делается попытка найти законы распределения скоростей и давления для любого сечения трубы, а также силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы.

Такого рода задачи рассматривались и в работах [1,2,3,4] и других.

Изучение таких задач представляет теоретический и практический интерес. При произвольном профиле скоростей скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных технологических и химических процессах. Например, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии и т.д.

Для описания движения воспользуемся уравнениями [1]

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

В системе уравнений (1.1) v_x , v_y - соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY , p - давление, ρ - плотность, ν - кинематический коэффициент вязкости, U - значение средней скорости по сечению в начале трубы.

Предположим, что поступающая в трубу жидкость имеет во входном сечении $x = 0$ некоторый заранее заданный произвольный осесимметричный профиль скоростей $v_x(\xi)$, где $\xi = y/h$.

Допустим, что функция $v_x(\xi)$ может быть разложена в ряд Фурье и что это разложение имеет вид

$$v_x = U\psi(\xi) \quad (1.2)$$

$$\psi(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi\xi \quad (1.3)$$

где a_n - постоянные коэффициенты разложения. Что касается величины U , то она при любом выборе $\psi(\xi)$ в виде (1.3) будет равна средней по расходу скорости во входном сечении трубы.

Граничные условия для поставленной задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x &= U\psi(\xi), \quad p = p_{II} \\ \text{при } y=h \quad x>0 \quad v_x &= U_1, \quad v_y = 0 \\ \text{при } y=-h \quad x>0 \quad v_x &= 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где p_{II} - давление во входном сечении, $2h$ - ширина плоской трубы, U_1 - заданная скорость верхней стенки трубы.

Введем безразмерные переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad u = \frac{v_x - U\psi(\xi)}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad P = \frac{p - p_{II}}{\rho U^2} \quad (1.5)$$

Тогда уравнения (1.1) и граничные условия (1.4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \\ \frac{\partial P}{\partial \xi} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

при $z = 0 \quad u = 0, \quad P = 0$

при $\xi = 1 \quad z > 0 \quad u = \frac{U_1 - U\psi(1)}{U}, \quad v = 0$ (1.7)

при $\xi = -1 \quad z > 0 \quad u = -\psi(-1), \quad v = 0$

здесь $\text{Re} = \frac{Uh}{\nu}$ (число Рейнольдса), $\psi(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$

2. Решение системы уравнений (1.6) при граничных условиях (1.7) найдем методом операционного исчисления.

Применив преобразование Лапласа к уравнениям (1.6) и к граничным условиям (1.7) получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - \lambda \bar{u} &= \lambda \bar{P} + \frac{1}{\lambda \text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^2 \pi \cos n\pi \xi \\ \frac{d\bar{P}}{d\xi} &= 0, \quad \lambda \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{d\xi} = 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

при $\xi = 1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U\psi(1)}{\lambda U}, \quad \bar{v} = 0$ (2.2)

при $\xi = -1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\frac{\psi(-1)}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0$

здесь λ - параметр преобразования Лапласа. Решая уравнение (2.1) и учитывая граничные условия (2.2), для $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{P}$ получим

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{U_1}{2\lambda U} \frac{\text{sh} \sqrt{\lambda \text{Re}} \xi}{\text{sh} \sqrt{\lambda \text{Re}}} + \left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \bar{P} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \right] \frac{\text{ch} \sqrt{\lambda \text{Re}} \xi}{\text{ch} \sqrt{\lambda \text{Re}}} - \\ &- \bar{P} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\pi \xi\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\bar{P} = - \left[\frac{U_1 - 2U\psi(1)}{2\lambda U} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \right] \frac{\text{th } \beta}{\text{th } \beta - \beta} \quad (2.4)$$

$$\bar{v} = -\frac{U_1}{2U} \frac{\operatorname{ch} \beta \xi}{\beta \operatorname{sh} \beta} \left[\frac{U_1 - 2U \psi(1)}{2\lambda U} + \bar{P} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (-1)^n \right] \frac{\lambda \operatorname{sh} \beta \xi}{\beta \operatorname{ch} \beta} + \\ + \lambda \bar{P} \xi + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\pi} \sin \pi n \xi + \frac{U_1}{2U} \frac{1}{\beta \operatorname{th} \beta} \quad (2.5)$$

$$\text{где } \beta = \sqrt{\lambda \operatorname{Re}}, \quad B_n = \frac{a_n n^2 \pi^2}{\lambda (\lambda \operatorname{Re} + n^2 \pi^2)}$$

Совершив обратные преобразования Лапласа и переходя к старым переменным, для v_x , v_y и p получим

$$v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1 \right) \frac{U_1}{4} + \frac{U_1}{2} \frac{y}{h} + \\ + \frac{U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y / h}{n} \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x \right) + \\ + 2U \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1 \right) \frac{1}{\mu_k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \right] \left[1 - \frac{\cos \mu_k y / h}{\cos \mu_k} \right] \exp \left(-\frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re} h} x \right) \quad (2.6)$$

$$v_y = \frac{U_1}{\operatorname{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^n \cos \pi n y / h \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x \right) + \\ + \frac{2U}{\operatorname{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{U_1}{2U} - 1 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n \mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \right] \left[\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_k y / h}{\sin \mu_k} \right] \exp \left(-\frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re} h} x \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{p - p_H}{\rho U^2} = \left(\frac{U_1}{2U} - 1 \right) \left[\frac{3}{\operatorname{Re} h} x + \frac{1}{5} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \exp \left(-\frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re} h} x \right) \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 a_n (-1)^n \frac{1}{\pi^2 n^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \exp \left(-\frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re} h} x \right) \right] \quad (2.8)$$

В формулах (2.6), (2.7) и (2.8) μ_k - простые корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.
Найдем значение силы трения

$$\tau = \frac{3\mu}{h^2} \left(\frac{U_1}{2} - U \right) y + \frac{\mu U_1}{2h} + \\ + \frac{\mu U_1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re}^2} \right) (-1)^n \cos \pi n y / h - \frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re}^2} \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x \right) + \\ + \frac{2\mu U}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{U_1 - 2U}{2U} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n \mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \right] \left[\left(1 + \frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re}^2} \right) \frac{\sin \mu_k y / h}{\sin \mu_k} - \frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re}^2 h} y \right] \exp \left(-\frac{\mu_k^2}{\operatorname{Re} h} x \right) \quad (2.9)$$

Значения силы трения на стенках будут

$$\tau^h = \frac{2\mu U_1}{h} - \frac{3\mu U}{h} + \frac{\mu U_1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{Re h} x\right) + \frac{\mu(U_1 - 2U)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_k^2}{Re h} x\right) - \frac{2\mu U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \exp\left(-\frac{\mu_k^2}{Re h} x\right) \quad (2.10)$$

$$\tau^{-h} = \frac{\mu U_1}{h} + \frac{3\mu U}{h} + \frac{\mu U_1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{Re h} x\right) - \frac{\mu(U_1 - 2U)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_k^2}{Re h} x\right) + \frac{2\mu U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n (-1)^n \frac{\mu_k^2}{\mu_k^2 - \pi^2 n^2} \exp\left(-\frac{\mu_k^2}{Re h} x\right) \quad (2.11)$$

На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут

$$v_{x\infty} = U + \left(\frac{U_1}{4} - \frac{U}{2}\right) \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right) + \frac{U_1}{2} \frac{y}{h} \quad (2.12)$$

$$v_{y\infty} = 0, \quad \frac{p_{\infty} - p_{11}}{\rho U^2} = \left(\frac{U_1}{2U} - 1\right) \left(\frac{3}{Re h} x + \frac{1}{5}\right) - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} a_n (-1)^n \quad (2.13)$$

$$\tau_{x\infty} = \frac{3\mu}{h^2} \left(\frac{U_1}{2} - U\right) y + \frac{\mu U_1}{2h} \quad (2.14)$$

Сила трения на стенках для стабилизированного участка примет следующие значения:

$$\tau_{x\infty}^h = \frac{\mu}{h} (2U_1 - 3U), \quad \tau_{x\infty}^{-h} = \frac{\mu}{h} (3U - U_1) \quad (2.15)$$

При $U_1 = 0$ определим в заключение с помощью формулы (2.6) длину начального участка.

Подставляя в (2.6) $y = 0$ и сохраняя в сумме одно лишь первое слагаемое, так как величины μ_k^2 растут очень быстро, для начального участка получим следующее приближенное выражение:

$$L = \frac{Re h}{20.19} \ln \left[36.98 + 747.06 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n}{20.19 - \pi^2 n^2} \right] \quad (2.16)$$

В качестве характерного примера использования полученных выше формул рассмотрим случай, когда

$$\psi(y/h) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

В этом случае коэффициенты разложения Фурье будут

$$a_n = - \frac{6(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

Подставляя это значение в формулу (2.16), получим $L = 0$, то есть если распределение скоростей потока в начальном сечении трубы имеет параболический вид, в сравнении с линейным профилем скоростей [1], по мере удаления от начального сечения сохраняет свой вид, сразу имея стабилизированный режим течения.

Если в (2.16) подставить $a_n = 0$, то получим значение начального участка для линейного профиля [1], то есть

$$L \approx 0.18 \operatorname{Re} h$$

3. Анализ полученных результатов:

а). Из формулы (2.12) видно, что при течении в трубе любой симметричный профиль продольных скоростей переходит в пределе в параболический, независимо от того, стенка трубы подвижная или нет.

б). Результаты работы [5] и настоящей работы (2.14), (2.15) показывают, что значение силы трения в потоке жидкости и на стенках трубы не зависят от начального профиля продольных скоростей жидкости и от того, принимается ли давление переменным в поперечном направлении трубы или нет.

в). Как показывают полученные формулы, выбором скоростей подвижной стенки и начального профиля продольных скоростей основного потока можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в начальном и в стабилизированном участках и, в частности, на стенках трубы.

г). Если в формулу (2.6), (2.7) и (2.8) подставить $a_n = 0$, $U_1 = 0$, то получим развитие линейного профиля скоростей [1], если $a_n \neq 0$, $U_1 = 0$, то получим результаты [4], а если $a_n = 0$, $U_1 \neq 0$, полученные результаты совпадают с результатами [6] при $U_2 = 0$.

Литература

1. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. - М.: Гостехиздат, 1951, с. 420.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Гостехиздат, 1955, 519 с.
3. Бобаджян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. О развитии течения вязкой жидкости в плоской трубе с проницаемыми стенками. - Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, изд-во АН Арм.ССР, 1987, с. 42-47.

4. Мнацаканян Р.Ж. Развитие произвольного профиля скоростей между параллельными стенками. - Межвуз. сб. научн. тр., Механика, Ереван, изд. ЕГУ, 1987, вып. 6, с. 191-187.
5. Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. Об одном точном решении уравнения Навье-Стокса. - Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1988, №5, т. 41, с. 47-52.
6. Бабаджанян Г.А., Мнацаканян Р.Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1987, т. 40, №3, с. 49-53

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию

15.04.1993