

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Гукасян А.А., Барсегян В.Р.

Ա. Ա. Ղուկասյան, Վ. Ռ. Բարսեղյան

Էլեկտրոմեխանիկական մանիպուլյատորի դինամիկայի հոստիլարի խնդիրը

Օգտվելով հավաքած խնդիրների լուծման դասական մեթոդներից, ուսումնասիրվում է բազմազան էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի շարժումը տված դիՖերենցիալ եւ հոլոնոմ ծրագրով:

A. A. Ghukasyan, V. R. Barsughlian

Reverse Problem of the Dynamics for Electro-magnetic Manipulator

В работе, с использованием классических методов решения обратной задачи динамики [1-5 и др.], исследовано движение многозвенного электро-механического манипулятора по заданной дифференциальной и по голономной программе.

1. Управление движением манипулятора по дифференциальной и голономной программе. Рассматривается управляемое движение  $N$ -звенного манипулятора. Звенья манипулятора считаются абсолютно твердыми телами, линейные размеры и массы которых равны  $l_i$ ,  $m_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), соответственно. Обобщенные координаты, определяющие ее конфигурацию в инерциальной системе координат  $OXYZ$ , обозначим через  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n; n \geq N$ ). Положение схвата, как абсолютно твердое тело, в пространстве определим через вектор  $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Компоненты вектора  $x$  являются декартовы координаты центра масс твердого тела и углы Эйлера. Движение манипулятора осуществляется посредством электро-механических приводов, с двигателями постоянного тока с независимым возбуждением и редуктора, расположенных в соединительных шарнирах звеньев манипулятора и в основании. Предполагается, что оси вращения роторов электродвигателей и оси выходных валов редукторов приводов совпадают с осями шарниров. Электро-механические силы и моменты, действующие на манипулятор, обозначим через  $n_i Q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Между усилиями  $Q_i$  и значениями сил тока ( $I_i$ ) в цепях роторов приводов имеется следующая связь:

$Q_i = k_i I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей приводятся к виду [6]

$$L_i \dot{Q}_i + R_i Q_i + k_i^2 n_i \dot{q}_i = k_i u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

где  $L_i$  - коэффициент индуктивности,  $R_i$  - электрическое сопротивление обмотки ротора электродвигателя,  $k_i$  - коэффициент пропорциональности между электрическим током и усилиями  $Q_i$ ;  $n_i$  - передаточное число редуктора,  $u_i$  - электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателя  $i$ -го привода.

Пусть задана программа движения выходного звена манипулятора в виде

$$\Phi_k(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m) = 0 \quad (k = 1, \dots, r; r \leq m \leq 6) \quad (1.2)$$

Учитывая из кинематики манипуляторов известную связь [7] между координатами схвата и обобщенных координат манипулятора, программу движения схвата (1.2) представим в виде:

$$\Phi_k^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, r; r \leq n) \quad (1.3)$$

Уравнение движения электромеханического манипулятора представим системой механических уравнений Лагранжа и уравнений баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей [5-7]:

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}(q_i, c_i) \ddot{q}_i + B_j(q_i, \dot{q}_i, c_i) = n_j Q_j \quad (1.4)$$

$$L_j \dot{Q}_j + R_j Q_j + k_j^2 n_j \dot{q}_j = k_j u_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

где  $c_j$  - постоянные параметры манипулятора.

Механические уравнения запишем в форме Коши:

$$\dot{q}_i = p_i$$

$$\dot{p}_i = f_i(q_i, p_i, c_i) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(q_i, p_i, c_i) Q_j \quad (1.5)$$

Следуя [1-4], применяя метод о построении дифференциальных уравнений по заданному частному решению, к решению обратных задач динамики для построения алгоритмов и систем управления, условия осуществимости программы (1.3) для системы (1.5) запишем в виде:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial q_i} p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_i} \left[ f_i(q_i, p_i, c_i) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(q_i, p_i, c_i) Q_j \right] = R_k^* \quad (k = 1, \dots, r) \quad (1.6)$$

где  $R_k^*(f_i, q_i, p_i)$  - произвольные функции, обращающиеся в нуль на многообразии  $\Phi_k^* = 0$  ( $k = 1, \dots, r$ ).

Система уравнений (1.6) является линейной относительно неизвестных функций  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Число искомых функций равно  $n$ , а число уравнений -  $r$  ( $r \leq n$ ). Решая систему уравнений (1.6) относительно  $\dot{p}_i$ , получим некоторое множество систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= p_i, \quad \dot{p}_j = \sum_{k=1}^r \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} R_k^* - \sum_{s=r+1}^n \frac{\Delta_{ks}}{\Delta} F_s, \\ \dot{p}_s &= F_s \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r; s = r+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь функции  $F_s$  ( $s = r+1, \dots, n$ ) являются произвольными и вместе с функциями  $R_k^*$  ( $k = 1, \dots, r$ ) обращаются в нуль на многообразиях  $\Phi_k^* = 0$ ;  $\Delta$  - функциональный определитель системы (1.6), который не равен нулю в силу независимости функций  $\Phi_k^*$  ( $k = 1, \dots, r$ );  $\Delta_{jk}$  - алгебраическое дополнение элемента определителя  $\Delta$ ;  $\Delta_{ks}$  - определитель, полученный из определителя  $\Delta$  заменой его  $k$ -го столбца  $s$ -м столбцом матрицы  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial q_i} & \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_i} \end{bmatrix}$ .

Оставшиеся функции  $F_s$  ( $s = r+1, \dots, n$ ) могут быть использованы для выполнения дополнительных условий. Такими условиями могут быть условия оптимальности, устойчивости, точности и т.д.

Так как уравнения (1.6) относительно  $Q_i$  являются  $r$  линейных уравнений  $n$  неизвестными, то имеется возможность относительно управляющих усилий  $Q_i$  вводить дополнительное условие оптимальности, например,

$$Z = \sum_{j=1}^n Q_j^i(t) \rightarrow \min, \quad t \in [t_0, T] \quad (1.8)$$

Здесь  $T$  - окончание процесса управления.

Применяя метод неопределенных коэффициентов Лагранжа для решения задачи условного экстремума (1.6), (1.8), получим для  $Q_j$  следующие выражения:

$$Q_j = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_i} b_{ij} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.9)$$

где неопределенные множители  $\lambda_k$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \lambda_k \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_i} b_{il} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial p_j} b_{ij} \right) \right] = \\
 & = R_s^* - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial q_i} p_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_s^*}{\partial p_i} f_i \quad (s = 1, \dots, r)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Обозначая главный определитель системы уравнений (1.10) через  $\Delta$  и предполагая, что  $\Delta \neq 0$ , а через  $\Delta_k$  - определитель, полученный из определителя  $\Delta$  заменой  $k$ -го столбца правой частью системы уравнений (1.10), и учитывая, что  $\Pi_k^* = 0$  на многообразии  $\Phi_k^* = 0$ , из (1.9) и (1.10), найдем оптимальное значение управляющих усилий:

$$Q_j^0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{\Delta_k}{\Delta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial q_i} b_{ij} \quad (j = 1, \dots, n) \tag{1.11}$$

Подставляя выражения для  $Q_j^0$  из (1.11) во второе уравнение системы (1.4), получим значение входного напряжения  $u_j^0$  электрического тока

$$u_j^0 = \frac{1}{k_j} (L_j Q_j^0 + R_j Q_j^0 + k_j^2 n_j \dot{q}_j) \quad (j = 1, \dots, n) \tag{1.12}$$

при которых электромеханические приводы обеспечивают движение манипулятора по заданной программе.

В случае голономной программы выражения (1.3) имеют вид:

$$\Phi_k^*(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, r, r \leq n) \tag{1.13}$$

Основное условие осуществимости программы (1.13), описываемой уравнениями (1.8), получим путем дифференцирования программы (1.13) в силу (1.5) [3]:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial q_i} \left[ f_i(q_i, p_i, c_i) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(q_i, p_i, c_i) Q_j \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_k^*}{\partial q_i \partial q_l} p_i p_l = R_k^* \quad (k = 1, \dots, r)
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

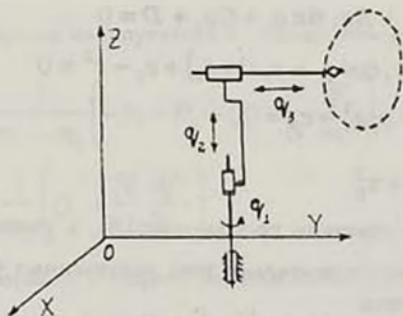
Дальнейшие исследования задачи при голономной программе следуют из вышерассмотренного общего случая.

Имеет смысл рассматривать также частный случай (1.12), когда  $L_i \ll R_i$ . В терминах физических параметров это неравенство означает, что время  $\tau_i = L_i/R_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) установления токов в цепях электродвигателей

много меньше времени рабочей операции [6]. При этом управляющие напряжения  $u_i^0$  в нулевом приближении определяются из соотношения

$$u_i^0 = \frac{1}{k_i} (R_i Q_i^0 + k_i^2 n_i \dot{q}_i) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.15)$$

2. Движение трехзвенного электромеханического манипулятора по эллиптической траектории с постоянной скоростью. Рассматривается движение электромеханического манипулятора с тремя степенями подвижности. Звенья манипулятора совершают одну вращательную и два поступательных движения (Фиг. 1). Требуется определить входные напряжения электрического тока приводов и соответствующие управляющие усилия для обеспечения движения схвата манипулятора по произвольно заданной эллиптической траектории с постоянной скоростью.



Фиг. 1

Механические уравнения манипулятора (1.4) в форме Коши имеют следующий вид:

$$\ddot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = f_i + b_{0i} Q_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$b_{11} = n_1 / (J_z + m_3 q_3^2); \quad b_{22} = n_2 / (m_2 + m_3); \quad b_{33} = n_3 / m_3$$

$$f_1 = -(b_1 p_1 + 2m_3 q_3^2 + p_1 p_3) / (J_z + m_3 q_3^2); \quad f_2 = -b_2 p_2 / (m_2 + m_3)$$

$$f_3 = -(b_3 p_3 - m_3 p_1^2 q_3) / m_3$$

где  $J_z = J_1 + J_2 + J_3$  ( $J_1, J_2, J_3$  - моменты инерции звеньев относительно центральных осей параллельных оси  $OZ$ );  $m_2, m_3$  - массы второго и третьего звеньев,  $b_i$  - коэффициенты трения соединительных шарниров,  $n_i Q_i$  - электромеханические силы и моменты, развиваемые приводами.

Эллиптическую траекторию в системе координат  $OXYZ$  зададим в виде пересечения кругового цилиндра и плоскости:

$$Ax + By + Cz + d = 0; \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \quad (2.2)$$

Условия движения звена в постоянной скоростью являются

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 \quad (2.3)$$

Используя связь между обобщенными координатами манипулятора и декартовыми координатами схвата ( $x = q_3 \cos q_1$ ,  $y = q_3 \sin q_1$ ,  $z = q_2$ ), программы (2.2), (2.3) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^* &= Aq_3 \cos q_1 + Bq_3 \sin q_1 + Cq_2 + D = 0 \\ \Phi_2^* &= q_3^2 - 2q_3(x_0 \cos q_1 + y_0 \sin q_1) + c_2 - r^2 = 0 \\ \Phi_3^* &= p_2^2 + p_3^2 + p_1^2 q_3^2 - c_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $c_2 = x_0^2 + y_0^2$ ,  $c_3 = v_0^2$

Из условия осуществимости программы (1.6), в рассматриваемом случае получим три уравнения относительно трех независимых  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые, решая, будем иметь:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{f_2 p_2 C \sigma_{23} + (p^2 + q_3^2 p_1^2) p_2 \sigma_{13} + (p_1 p_3 + q_3 f_1) q_3^2 p_1 C - \\ &- C q_3^2 - (2 p_1 p_3 + q_3 f_1) [(A y_0 - B x_0) p_2 + q_3 p_2 \sigma_{11} + p_3 C \sigma_{21} + \\ &+ q_3 p_1 C \sigma_{23}]\} \times \{b_{11} q_3 [q_3 \sigma_{11} + (A y_0 - B x_0)] p_2 + \\ &+ b_{11} q_3 C (\sigma_{21} p_3 - q_3^2 p_1 + q_3 p_1 \sigma_{23})\}^{-1} \\ Q_2 &= \{\sigma_{13} (p_3^2 + q_3^2 p_1^2) - (q_3 - \sigma_{23}) C f_2 - (2 p_1 p_3 + q_3 f_1) [q_3 \sigma_{11} + \\ &+ (A y_0 - B x_0)] + b_{11} q_3 [q_3 \sigma_{11} - (B x_0 - A y_0)] Q_1\} \times \\ &\times [C b_{22} (q_3 - \sigma_{23})]^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= [-(2 p_1 p_3 + q_3 f_1) \sigma_{21} - (q_3 p_1^2 - f_3) \sigma_{23} - \\ &- (p_3^2 + q_3 f_3) - b_{11} q_3 \sigma_{21} Q_1] [b_{33} (q_3 - \sigma_{23})]^{-1} \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{11} = -A \sin q_1 + B \cos q_1; \quad \sigma_{13} = -\frac{d\sigma_{11}}{dq_1}$$

$$\sigma_{21} = x_0 \sin q_1 - y_0 \cos q_1; \quad \sigma_{23} = \frac{d\sigma_{21}}{dq_1}$$

Подставляя выражения (2.5) в уравнения баланса напряжений (1.12), определим управляющие напряжения для обеспечения движения схвата по эллиптической траектории с постоянной скоростью (2.4).

3. Решение обратной задачи динамики электромеханического манипулятора, выполняющей обработку поверхности. Построим алгоритм управления двухзвенного электромеханического манипулятора, имеющий две поступательные пары для обработки поверхности при заданной нормальной силе в точке контакта.

Механическое уравнение манипулятора в нормальном виде является:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 = \dot{p}_1, \quad \ddot{p}_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left( -P_1 - P_2 + Q_1 + \frac{N}{G} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \\ \ddot{q}_2 = \dot{p}_2, \quad \ddot{p}_2 &= \frac{1}{m_2} \left( Q_2 + \frac{N}{G} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $m_1, m_2$  - массы первого и второго звеньев манипулятора;  $P_1, P_2$  - силы тяжести первого и второго звеньев;  $Q_1, Q_2$  - электромеханические силы, развиваемые приводами манипулятора в первом и во втором шарнирах;  $N$  - модуль вектора нормальной силы в точке контакта инструмента и детали;

$f(q_1, q_2) = 0$  - уравнение кривой, по которой необходимо осуществить движение инструмента;  $G = |\text{grad } f(q_1, q_2)|$ .

Из (1.14) следует, что для выполнения программы  $f(q_1, q_2) = 0$ , имеем одно уравнение относительно двух неизвестных  $Q_1$  и  $Q_2$ . Для полного определения управляющих воздействий  $Q_1, Q_2$ , вводится также дополнительное условие оптимальности

$$Z = \sum_{i=1}^2 Q_i^2(t) \rightarrow \min \quad t \in [t_0, T] \quad (3.2)$$

Решая полученную задачу условного экстремума, имеем:

$$Q_1^0 = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad Q_2^0 = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \quad (3.3)$$

где

$$\lambda = \left[ \frac{2}{m_1} \frac{N}{G} \left( \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \left( -P_1 - P_2 - \frac{N}{G} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - R^* \right] \left[ \left( \frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.4)$$

Для определения управляющих напряжений  $u_i^0$ , подставим выражения (3.3), (3.4) при  $R^* = 0$  в уравнение (1.12).

Пусть закон изменения нормальной силы при обработке поверхности имеет вид

$$\dot{N} = \mu(N - N_{np}) \quad (3.5)$$

где  $\mu < 0$ ,  $N_{np}$  - программное значение силы реакции поверхности в точке контакта.

В частном случае  $L_i \ll R_i$  и при условиях (3.5), для управляющих напряжений имеем выражения:

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \frac{1}{k_1} \left[ L_1 \varphi_1 \mu (N - N_{np}) + (L_1 \dot{\varphi}_1 + R_1 \varphi_1) \mu + \right. \\ &\quad \left. + L_1 \dot{\varphi}_2 + R_1 \varphi_2 \right] + n_1 k_1 \dot{q}_1 \\ u_2^0 &= \frac{1}{k_2} \left[ L_2 \varphi_3 \mu (N - N_{np}) + (L_2 \dot{\varphi}_3 + R_3 \varphi_3) \mu + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \dot{\varphi}_4 + R_2 \varphi_4 \right] + k_2 n_2 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \Psi_1, & \varphi_2 &= -\frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \Psi_2 \\ \varphi_3 &= -\frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \Psi_1, & \varphi_4 &= -\frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \Psi_2 \\ \Psi_1 &= \left[ \frac{1}{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 - \frac{1}{m_1} \left( \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 \right] \left[ G \left( \frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + G \left( \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\Psi_2 = \left[ \frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right] \left[ \left( \frac{1}{m_1} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)^2 \right]^{-1}$$

Обработку поверхности в подобных задачах можно считать завершённой, если сила реакции в точке контакта инструмента достигает своего программного значения. Следить за уменьшением силы реакции можно с помощью датчика усилий, расположенного на схвате манипулятора.

#### Литература

1. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. - М.: Наука, 1981.
2. Петров Б.Н., Крутько П.Д., Попов Е.П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики. - ДАН СССР, 1979, т. 247, №5, с. 1078-1081.
3. Механика промышленных роботов. В 3-х томах. /Под ред. К.В.Фролова, Е.И.Воробьева/. - М.: Высшая школа, 1988.
4. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. - М.: Наука, 1988.
5. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. - М.: Наука, 1989.
6. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов. - Изв. АН СССР, МТТ, №4, 1986, с. 21- 29.
7. Гукасян А.А. Об оптимальном управлении манипулятором с электромеханическими приводными системами. - ЕГУ, Межвуз. сборн. науч. трудов. Прикладная математика, 1988, вып. 7, с. 86-105.

Ереванский госуниверситет

Поступила в редакцию  
10.08.1992