ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 5-6, 1994 Механика

О ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МАЛОНАПРЯЖЕННОГО НЕОДНОРОДНО-СОСТАВНОГО КЛИНА

Акопян А.Г.

Ա. Գ. Հակոբյան

Թերլարված անհամասեռ-բաղադրյալ սեպի հարթ դեֆորմացիայի մասին

Դիտարկվում է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող, բաղադրյալ, սեպաձև մարմնի կոնտակտային մակերևույթի եզրին թերլարվածության վիճակի վրա նյութի անհամասեռության ազդեցությունը հարթ դեֆորմացիայի պայմաններում:

Hakobyan A.G.

On The Plane Deformation of Low-Stress Level Nonhomogeneous-Compound Wedge

Рассматривается влияние неоднородности материала на малонапряженное состояние на крае контактной поверхности составного клиновидного тела, со степенным законом упрочнения, в условиях плоской деформации. Принимаем, что одна грань клина свободна, а на другой задано условие гладкого контакта.

Решение аналогичной задачи для однородного составного клина изложено в монографии [1]. Вопросам концентрации напряжений в угловой точке составного, однородного линейно-упругого тела, при плоской деформации, посвящены работы [2,3]. Задачи малонапряженности неоднородно-состаaного клина со свободными гранями, при продольном сдвиге и плоской деформации, рассмотрены в работе [4].

1.Постановка задачи. Пусть два призматических тела, соединенные по боковым поверхностям полным прилипанием, находятся в состоянии плоской деформации. Механические характеристики обоих материалов считаются неоднородными. Одна из двух других боковых поверхностей свободна от нагрузок, а другая опирается на жесткий неподвижный штамп с плоской, абсолютно гладкой подошвой. В поперечном сечении этого тела, в окрестности угловой точки поверхности соединения, проведем полярную систему координат с центром в вершине клиновидного края поверхности.

В каждой клиновидной области имеем дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$
$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0 \qquad (1.1)$$

соотношения между компонентами деформаций и перемещений

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$
$$2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \qquad (1.2)$$

зависимости между компонентами напряжений и деформаций

$$\sigma_r-\sigma=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_r-\varepsilon),\quad \sigma_\theta-\sigma=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\varepsilon_\theta-\varepsilon)$$
$$\tau_{r\theta}=2\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\gamma_{r\theta},\quad \sigma=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta) \qquad (1.3)$$

Здесь

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+\tau_{r\theta}^2},\quad \varepsilon_0=\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+4\gamma_{r\theta}^2}$$

- интенсивности напряжений и деформаций, между которыми принимается зависимость

$$\sigma_0=K\varepsilon_0^m,\quad K=K(\theta),\quad 0\le m\le 1 \qquad (1.4)$$

где функция $K(\theta)$ характеризует неоднородные деформативные свойства материалов и определяется из экспериментов. Степени упрочнения m у обоих материалов принимаются одинаковыми, а функции $K(\theta)$ - различными.

В каждой области допускается условие несжимаемости материала $\varepsilon=0$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=0 \qquad (1.5)$$

Принимаем край $\theta=\alpha$ свободным, то есть $\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$, а на крае $\theta=-\beta$ касательное напряжение и нормальное перемещение равны нулю $\tau_{r\theta}=v=0$.

Величины в областях $0\le\theta\le\alpha$, $-\beta\le\theta\le 0$ обозначим индексами $i=1,2$.

2. Случай $\lambda\ne 1$. Поле перемещений в каждой области, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), в окрестности точки $r=0$ представим в виде

$$u_i = r^\lambda f_i', \quad v_i = -(\lambda+1) r^\lambda f_i$$

где $f_i = f_i(\lambda,\theta)$ и λ - соответственно, искомая собственная функция и собственное значение задачи.

Компоненты напряжений представятся в виде

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4\lambda K_i r^{(\lambda-1)m} f_i' \chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = K_i r^{(\lambda-1)m}\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i$$

где

$$\chi_i = \left\{\sqrt{\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]^2 + 4\lambda^2 f_i'^2}\right\}^{m-1}$$

Удовлетворив дифференциальным уравнениям равновесия (1.1), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\left\{K_i\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i\right\}'' + K_i\left(1 - \frac{\eta^2}{\lambda^2}\right)\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i + \\ +4\eta\left(K_i f_i' \chi_i\right)' = 0, \qquad \eta = \lambda\left[1 + (\lambda-1)m\right]\end{gathered} \tag{2.1}$$

и к выражению

$$\sigma_{\theta i} = -\frac{r^{(\lambda-1)m}}{(\lambda-1)m}\left\{\left(K_i\left[f_i'' + (1-\lambda^2) f_i\right]\chi_i\right)' + 4\eta K_i f_i' \chi_i\right\}, \ \lambda \neq 1$$

Граничные условия на внешних поверхностях клина

$$\left(K_1\left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1\right)' + 4\eta K_1 f_1' \chi_1 = 0, \quad f_1'' + (1-\lambda^2) f_1 = 0 \text{ при } \theta = \alpha$$

$$f_2'' = f_2 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = -\beta \tag{2.2}$$

на контактной поверхности

$$\begin{gathered}\left\{K_1\left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1\right\}' + 4\eta K_1 f_1' \chi_1 = \\ = \left\{K_2\left[f_2'' + (1-\lambda^2) f_2\right]\chi_2\right\}' + 4\eta K_2 f_2' \chi_2 \\ \left[f_1'' + (1-\lambda^2) f_1\right]\chi_1 = \gamma\left[f_2'' + (1-\lambda^2) f_2\right]\chi_2, \quad \gamma = \frac{K_2(0)}{K_1(0)} \\ f_1 = f_2, \quad f_1' = f_2' \quad \text{при} \quad \theta = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3) - трехточечная задача на собственные значения для определения $f_i(\lambda,\theta)$ и λ.

Полуобратным способом, придавая различные значения $\lambda = \lambda_* < 1$ из (2.1)-(2.3) численным способом определяются, в конечном счете, соотношения между параметрами α, β, γ, m и параметрами неоднородности материалов для данной степени концентрации напряжений.

При условии $\lambda = \lambda_* > 1$ в пространстве этих параметров определится область малонапряженности.

При подстановке $f_i' = f_i F_i$ снижается порядок уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3).

3.Случай $\lambda = 1$. В специальном исследовании нуждается случай конечных напряжений. Поле перемещений, удовлетворяющее условию несжимаемости (1.5), представим в виде

$$u_i = rf_i', \quad v_i = -2rf_i, \quad w_i = 0$$

где $f_i = f_i(\theta)$ - искомая функция θ.

Соответственно, компоненты напряжений можно записать в виде

$$\sigma_{ri} = \sigma_{\theta i} + 4K_i\psi_i\chi_i, \quad \tau_{r\theta i} = K_i\psi_i'\chi_i \tag{3.1}$$

где

$$\chi_i = \left(\sqrt{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}\right)^{m-1}, \quad \psi_i = f_i'(\theta)$$

Подставляя (3.1) в уравнения равновесия (1.1), приходим к выражениям

$$\sigma_{\theta 1} = 2\int_\theta^\alpha K_1\psi_1'\chi_1 d\theta, \quad \sigma_{\theta 2} = 2\left(\int_0^\alpha K_1\psi_1'\chi_1 d\theta + \int_\theta^0 K_2\psi_2'\chi_2 d\theta\right)$$

где использованы условия отсутствия нормальных напряжений на свободном крае клина и их равенство на контактной поверхности $\theta = 0$.

Для функции $\psi_i(\theta)$ получается система дифференциальных уравнений

$$\left(K_i\psi_i'\chi_i\right)' + 4K_i\psi_i\chi_i = 0 \tag{3.2}$$

с граничными условиями

$$\psi_1'(\alpha) = \psi_2'(-\beta) = 0 \tag{3.3}$$

и с условиями на контактной поверхности

$$\psi_1' \chi_1 = \gamma \psi_2' \chi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \tag{3.4}$$

где $\gamma = K_2(0)/K_1(0)$.

После некоторых преобразований из (3.2) следует

$$\left(\psi_i'' + 4\psi_i\right)\frac{m\psi_i'^2 + 4\psi_i^2}{\psi_i'^2 + 4\psi_i^2} + \frac{K_i'}{K_i}\psi_i' = 0 \tag{3.5}$$

Откуда, вводя новую функцию $\varphi_i = \psi_i' / \psi_i$, получим систему уравнений первого порядка

$$\varphi_i' = -\frac{K_i'}{K_i}\frac{\varphi_i^2 + 4}{m\varphi_i^2 + 4}\varphi_i - \varphi_i^2 - 4 \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(-\beta) = 0 \tag{3.7}$$

Усоловие контакта (3.4) примет вид

$$\varphi_1(0)\left[\sqrt{\varphi_1^2(0) + 4}\right]^{m-1} = \gamma\varphi_2(0)\left[\sqrt{\varphi_2^2(0) + 4}\right]^{m-1} \tag{3.8}$$

Таким образом, система уравнений (3.6) с краевыми условиями (3.7), (3.8) определяет гиперповерхность конечных напряжений с учетом неоднородности материалов и физической нелинейности.

Для случая экспоненциального закона неоднородности

$$K_i(\theta) = k_i \exp(2h\theta) \tag{3.9}$$

где k_i и h_i - заданные постоянные, построено численное решение краевой задачи (3.3)-(3.5), которая устанавливает зависимость $\beta = \beta(\alpha, n, \gamma, h)$. Здесь обозначено $n = 1/m$, $\gamma = k_2/k_1$. С точки зрения численного решения, уравнения (3.6)-(3.8) оказались неудобными из-за быстрого возрастания значений функций $\varphi_i(\theta)$, что приводило к переполнению порядка числа при выполнении арифметической операции ЭВМ. Для построения численного решения задачи (3.3)-(3.5), вводя новую функцию $g(\theta)$, сначала уравнения (3.5) приводим к каноническому виду

$$\begin{aligned} \psi_i' &= g_i \\ g_i' &= -2h\frac{4\psi_i^2 + g_i^2}{4\psi_i^2 + mg_i^2} - 4\psi_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

с трехточечными краевыми условиями:

точке $\theta = \alpha$

$$g_1(\alpha) = 0 \tag{3.11}$$

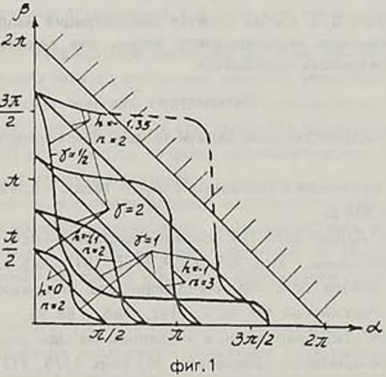
точке $\theta = 0$

$$g_1(0)\left[\sqrt{4\psi_1^{\,2}(0) + g_1^{\,2}(0)}\right]^{m-1} = \gamma g_2(0)\left[\sqrt{4\psi_2^{\,2}(0) + g_2^{\,2}(0)}\right]^{m-1}$$
$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \tag{3.12}$$

точке $\theta = -\beta$

$$g_2(-\beta) = 0 \tag{3.13}$$

Задавая произвольное значение $\psi_1(\alpha) = A$, систему уравнений (3.10) с условием (3.11) сведем к задаче Коши, которая решается методом Рунге-Кутты [5] в интервале $0 \le \theta \le \alpha$. Находя значения $\psi_1(0)$ и $g_1(0)$, из (3.12) определяем $\psi_2(0)$ и $g_2(0)$, которые, принимая как начальные условия, продолжаем численное интегрирование (3.10) до той точки $\theta_* = -\beta$, где впервые выполняется условие (3.13). Для различных значений параметра A эта точка $\theta_* = -\beta$ остается неизменной, что является следствием однородности уравнений (3.5).



фиг.1

Результаты численного решения приведены на фиг.1, откуда следует, что с изменением степени неоднородности h, зоны малонапряженности (ниже кривых) заметно изменяются, как для составного, так и для сплошного $(\gamma = 1)$ неоднородного клина.

4.Линейно-упругий неоднородно-составной клин. Если составной клин изготовлен из линейно-упругих неоднородных материалов, принимая в уравнениях (3.6)-(3.8) $m=1$ и экспоненциальный закон неоднородности (3.9), приходим к следующему трансцендентному уравнению предельных кривых малонапряженности:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\alpha\right)}{\sqrt{4-h^2}-h\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\alpha\right)}+\gamma\frac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\beta\right)}{\sqrt{4-h^2}+h\operatorname{tg}\left(\sqrt{4-h^2}\beta\right)}=0 \qquad (4.1)$$

Здесь соблюдается условие $|h|<2$.

Для однородного составного линейно-упругого клина, принимая $h=0$, из (4.1) следует уравнение

$$\operatorname{tg}2\alpha+\gamma\operatorname{tg}2\beta=0$$

Во время исследования случая $|h|\geq 2$ выяснилось, что гиперповерхности конечных напряжений в интеравле $0<\alpha+\beta\leq 2\pi$ не пересекаются с координатной плоскостью $\alpha\beta$ (эти уравнения не приводятся). Это означает, что при таких значениях параметра h составной линейно-упругий клин находится в состоянии малонапряженности.

В рассматриваемой задаче, если для сплошного однородного клина при растворе угла больше $\pi/2$ всегда имеется концентрация напряжений в вершине, то для сплошного неоднородного клина, как показывают графики (фиг.1), эта закономерность нарушается.

Литература

1. *Задоян М.А.* Пространственные задачи теории пластичности. - М.: Наука, 1992. 384 с.
2. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. - Ереван: Изд-ао АН Арм.ССР, 1987. 338 с.
3. *Аксентян О.К., Лущик О.Н.* Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. - Изв. АН СССР, МТТ, 1978, №5, с.102-108.
4. *Акопян А.Г., Задоян М.А.* Малонапряженность неоднородно-составных клиньев. - Изв. Российской АН, МТТ, 1992, №5, с.88-96.
5. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979. 312 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
1.04.1993