

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНОМ КОЛЕБАНИИ СТЕРЖНЕЙ
ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Гаспарян А.Е., Хачатрян А.А.

Ն. Ե. Գասպարյան, Ա. Ա. Խաչատրյան

Փոփոխական կտրվածքով ձողերի երկայնական տատանումներին նվիրված որոշ խնդիրներ

Լուծված են փոփոխական կտրվածքով ձողերի երկայնական տատանումների խնդիրներ, երբ ձողերի ընդլայնական կտրվածքների մակերևույթները փոփոխվում են երկու տարբեր ֆունկցիաների ընդանիցեն-րով: Ատրավված են համապատասխան բանաձևեր տրեղափոխությունների համար: Կատարված են թվա-յին հաշվարկներ:

A.E. Gasparian, A.A. Khachatryan

Some Problems on the Longitudinal Vibrations of Rods with Variable Cross Sections

Решены задачи о продольных колебаниях стержней, площади поперечных сечений которых меняются по двум различным семействам функций. Получены необходимые формулы и соотношения для перемещений. Рассмотрены числовые примеры.

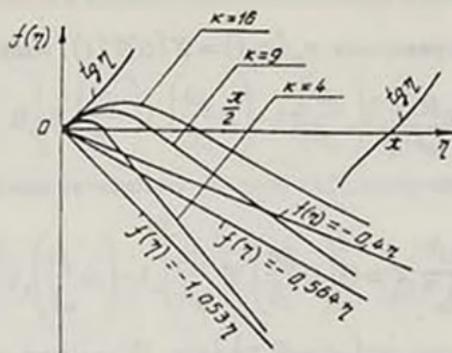
В настоящей работе, являющейся как бы продолжением статьи [1], рассматриваются стержни, площади поперечных сечений которых по длине стержня изменяются по законам следующих двух семейств функции:

$$\begin{aligned} \text{a) } F_m(x) &= F_0 \left(1 - \delta_m \frac{x}{l} \right)^m, \quad \delta_m = 1 - \frac{1}{\sqrt[m]{k}} \\ \text{b) } F_{-m}(x) &= F_0 \left(1 + \lambda_m \frac{x}{l} \right)^{-m}, \quad \lambda_m = \sqrt[m]{k} - 1 = \sqrt[m]{k} \delta_m \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь для каждого стержня, независимо от значения индекса

$$F_{\pm m}(0) = F_0 = k F_{\pm m}(l), \quad (k > 1) \quad (2)$$

Предположим, стержни имеют форму тела вращения. При этом на фиг. 1 представлены примерные графики радиусов $r_{\pm m}(x)$ поперечных сечений для некоторых значений m при $k = 16$. Здесь $r_1(x)$ есть выпуклая кривая, $r_2(x)$ - прямая (случай усеченного конуса), все остальные - вогнутые.



фиг.1

Отметим, что для функций $r_{\pm m}(x)$ в открытом интервале $0 < x < l$ имеют место следующие неравенства:

$$r_{-m}(x) < r_{-(m+1)}(x) < r(x) = r_0 e^{\frac{x}{l} \ln \sqrt{2}} < r_{m+1}(x) < r_m(x) \quad (3)$$

где $r(x)$ является предельным значением функций $r_{\pm m}(x)$, когда $m \rightarrow \infty$ и представляет собой границу раздела двух рассматриваемых семейств.

Как известно, свободное продольное колебание стержней переменного поперечного сечения описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Здесь $u(x, t)$ - продольное перемещение точек стержня с координатой x в момент времени t ; $a^2 = E/\rho$; E , ρ - модуль упругости и плотность материала.

Для решения конкретных примеров к уравнению (4) присоединяются необходимые граничные и начальные условия.

Ниже рассматриваются задачи, где стержни (1), закрепленные в одном конце $x = 0$, растянуты силой P и в момент времени $t = 0$ внезапно освобождаются от силы, представив им свободно колебаться.

1. В этом пункте рассмотрим стержни $F_m(x)$ - первого семейства (1).

Подставляя в уравнение (4) значение $F_m(x)$ из (1), с заменой x на α

$$1 - \delta_m \frac{x}{l} = \alpha \quad \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \alpha \leq 1 \right) \quad (1.1)$$

и производя разделением переменных $u_m(\alpha, t) = X(\alpha)T(t)$, получим

$$\frac{\delta_m^2}{X} \left(X'' + \frac{m}{\alpha} X' \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{T''}{T} = -\omega^2 \quad (1.2)$$

или

$$\begin{cases} X'' + \frac{2p+1}{\alpha} X' + \frac{\omega^2}{\delta_m^2} X = 0 \\ T'' + \frac{\omega^2 \alpha^2}{l^2} T = 0 \end{cases} \quad \left(p = \frac{m-1}{2} \right) \quad (1.3)$$

Общие решения уравнений (1.3) имеют вид

$$X(\alpha) = \alpha^{-p} \left[A_1 J_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) + A_2 Y_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \alpha \right) \right] \quad (1.4)$$

$$T(t) = A_3 \cos \frac{\omega \alpha}{l} t + A_4 \sin \frac{\omega \alpha}{l} t$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \alpha = l \quad u_m = 0; \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

$$2) \text{ при } \alpha = \frac{l}{\sqrt[3]{k}} \quad \frac{\partial u_m}{\partial \alpha} = 0; \quad 4) \text{ при } t = 0 \quad u_m = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-2p} - 1)$$

Из первых двух условий (1.5) имеем

$$\begin{aligned} A_1 J_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \right) + A_2 Y_p \left(\frac{\omega}{\delta_m} \right) &= 0 \\ A_1 J_{p+1} \left(\frac{\omega}{\lambda_m} \right) + A_2 Y_{p+1} \left(\frac{\omega}{\lambda_m} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

а из третьего условия - $A_4 = 0$.

Из системы (1.6) для определения ω получаем следующее трансцендентное уравнение, которое имеет неограниченное количество корней $\omega_n (n = 1, 2, 3, \dots)$:

$$J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_{p+1} \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) - Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде

$$u_m(\alpha, t) = \alpha^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (1.8)$$

Удовлетворив теперь четвертому условию (1.5), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] = \frac{Pl}{2pEF_0 \delta_m} (\alpha^{-p} - \alpha^p) \quad (1.9)$$

Для определения величин B_n следует учесть, что здесь функции в квадратных скобках ортогональны в интервале $1/\sqrt{k} \leq \alpha \leq 1$ с весом α (доказательство не приводится).

После определения величин B_n и некоторых преобразований, окончательное решение задачи представим в виде

$$u_m(\alpha, t) = \frac{\pi Pl k^{\frac{p+1}{m}}}{EF_0 \alpha^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_{p+1} \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right)}{\omega_n \left[J_p^2 \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) - J_{p+1}^2 \left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \right) \right]} \times \left[Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) - J_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \right) Y_p \left(\frac{\omega_n}{\delta_m} \alpha \right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (1.10)$$

Отметим, что это решение верно для всех конечных значений $m = 1, 2, 3, \dots$ ($p = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) несмотря на то, что в четвертом условии (1.5) случай $m = 1$ ($p = 0$) является особым и при отдельном его рассмотрении необходимо было бы произвести предельный переход $p \rightarrow 0$.

Из решения (1.10) можно получить соответствующее решение для стержня постоянного поперечного сечения ($k = 1$). Но для этого следует учесть, что при $k \rightarrow 1$ аргументы функции Бесселя безгранично возрастают, так как при этом $\delta_m, \lambda_m \rightarrow 0$ и поэтому необходимо предварительно пользоваться их асимптотическими разложениями. Тогда трансцендентное уравнение (1.7) преобразуется к виду

$$\cos \omega_n = 0, \quad \omega_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (1.11)$$

Далее в (1.10), пользуясь асимптотическими разложениями и учитывая (1.11), после перехода к переменной x и пределу $k \rightarrow 1$, получим известное

решение рассматриваемой задачи для стержня постоянного поперечного сечения [2]

$$u(x, t) = \frac{8Pl}{\pi^2 EF_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при нечетных значениях $m = 1, 3, \dots$ индексы бесселевых функций целые числа, а при четных значениях $m = 2, 4, \dots$ указанные индексы принимают значения целое число плюс $1/2$. В последнем случае известно, что бесселевы функции выражаются через элементарные функции.

2. Теперь рассмотрим стержни $F_{-m}(x)$ второго семейства (1). Подставляя в уравнение (4) выражение $F_{-m}(x)$ из (1), а ламиную x на β

$$1 + \lambda_m \frac{x}{l} = \beta \quad (1 \leq \beta \leq \sqrt[3]{k}) \quad (2.1)$$

и производя разделение переменных $u_{-m}(\beta, t) \equiv v_m(\beta, t) = Z(\beta)\Theta(t)$ получим

$$\frac{\lambda_m^2}{Z} \left(Z'' - \frac{m}{\beta} Z' \right) = \frac{l^2}{a^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\Omega^2 \quad (2.2)$$

или

$$\begin{cases} Z'' + \frac{2q+1}{\beta} Z' + \frac{\Omega^2}{\lambda_m^2} Z = 0 \\ \Theta'' + \frac{\Omega^2 a^2}{l^2} \Theta = 0 \end{cases} \quad \left(q = -\frac{m+1}{2} = -(p+1) \right) \quad (2.3)$$

Общие решения уравнений (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \beta^{-q} \left[C_1 J_q \left(\frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) + C_2 Y_q \left(\frac{\Omega}{\lambda_m} \beta \right) \right] \\ \Theta(t) &= C_3 \cos \frac{\Omega a}{l} t + C_4 \sin \frac{\Omega a}{l} t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для рассматриваемой задачи граничные и начальные условия следующие:

$$1) \text{ при } \beta = 1 \quad v_m = 0; \quad 3) \text{ при } t = 0 \quad \frac{\partial v_m}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

$$2) \text{ при } \beta = \sqrt[3]{k} \quad \frac{\partial v_m}{\partial \beta} = 0; \quad 4) v_m(\beta, 0) = \frac{Pl}{2qEF_0 \lambda_m} (1 - \beta^{-2q})$$

Поступая аналогично первому пункту, получим следующее трансцендентное уравнение относительно Ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)Y_{q+1}\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right) - Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right)J_{q+1}\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right) = 0 \quad (2.6)$$

Тогда общее решение можно представить в виде

$$v_m(\beta, t) = \beta^{-q} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right) J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right) Y_q\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\Omega_n a}{l} t \quad (2.7)$$

Прежде чем перейти к определению величин D_n , преобразуем трансцендентное уравнение (2.6). Учитывая, что $q = -(p+1) < 0$ и пользуясь известными формулами перехода от отрицательных к положительным индексам бesselовых функций, уравнение (2.6) приводится к виду

$$J_p\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)Y_{p+1}\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right) - Y_p\left(\frac{\Omega_n}{\delta_m}\right)J_{p+1}\left(\frac{\Omega_n}{\lambda_m}\right) = 0 \quad (2.8)$$

Из сравнения уравнений (2.8) и (1.7) следует, что

$$\Omega_n = \omega_n \quad (2.9)$$

Таким образом, имеет место любопытный факт, что в поставленной здесь задаче для стержней обеих семейств (1), определяемых одним и тем же значением m , их собственные числа совпадают.

После удовлетворения четвертому условию (2.5) и учитывая (2.9), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] = \frac{Pl}{2qEF_0\lambda_m} (\beta^q - \beta^{-q}) \quad (2.10)$$

Пользуясь ортогональностью функции в квадратных скобках (2.10) с весом β в интервале $1 \leq \beta \leq \sqrt[k]{k}$, определяем коэффициенты D_n , после чего общее решение задачи будет

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi P l k^{-\frac{q+1}{m}}}{EF_0 \beta^q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{q+1}\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right)}{\omega_n \left[J_q^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) - J_{q+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) \right]} \times \left[Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) - J_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_q\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m} \beta\right) \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (2.11)$$

После перехода от отрицательных к положительным индексам Бесселевых функций, окончательное решение задачи принимает вид

$$v_m(\beta, t) = \frac{\pi l P k_m^p}{E F_0} \beta^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_p\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right)}{\omega_n \left[J_p^2\left(\frac{\omega_n}{\delta_m}\right) - J_{p+1}^2\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \right]} \times \left[Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \beta - J_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) Y_{p+1}\left(\frac{\omega_n}{\lambda_m}\right) \beta \right] \cos \frac{\omega_n a}{l} t \quad (2.12)$$

Отметим, что результат (1.12), полученный для стержней постоянного поперечного сечения из (1.10), получается аналогичным образом также и из (2.12).

3. Выше было показано, что в рассматриваемой задаче для обоих семейств стержней (1) трансцендентное уравнение одно и то же (1.7). Корни этого трансцендентного уравнения ω_n зависят от параметров m и k , то есть $\omega_n = \omega_n(m, k)$.

Рассмотрим частные случаи ($m=2$ и $m=4$), при которых бesselовы функции выражаются через элементарные функции

$$a) \quad m=2 \quad (p=1/2)$$

В этом случае из (1) имеем $\delta_2 = 1 - 1/\sqrt{k}$, $\lambda_2 = \sqrt{k} - 1 = \sqrt{k} \delta_2$.

Обозначив $\omega_n(2, k) = \xi_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) - Y_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\delta_2}\right) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\xi_n}{\lambda_2}\right) = 0 \quad (3.1)$$

Отсюда, после замены бesselовых функций соответствующими их выражениями, получим

$$\operatorname{tg} \xi_n = -\frac{\xi_n}{\lambda_2} \quad (3.2)$$

Здесь очевидно, что интересующие нас положительные корни трансцендентного уравнения (3.2) находятся в следующих интервалах:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2} < \xi_n < n\pi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

Они расположены ближе к левому краю и по мере возрастания n приближаются к левому значению (3.3).

В табл.1 приведены значения нескольких корней $\xi_n(k)$ уравнения (3.2) при двух значениях k ($k=2, k=10$).

ТАБЛИЦА 1

n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$	n	$\xi_n(2)$	$\xi_n(10)$
1	1.7973	2.3209	4	11.0331	11.1865
2	4.7985	5.1125	5	14.1664	14.2874
3	7.9062	8.1144	6	17.3026	17.4024

В общих решениях (1.10) и (2.12), произведя необходимые замены и некоторые преобразования с учетом (3.2), соответственно получим

$$u_2(\alpha, t) = \frac{2\sqrt{k}P\Omega_2}{EF_0\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \sin \frac{\xi_n}{\delta_2} (1-\alpha) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.4)$$

$$v_2(\beta, t) = \frac{2\sqrt{k}P\Omega_2}{EF_0} \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2(\lambda_2^2 + \cos^2 \xi_n)} \cos \frac{\xi_n}{\lambda_2} (\beta - \sqrt{k}) \cos \frac{\xi_n a}{l} t \quad (3.5)$$

$$6) m=4 \quad (p=3/2)$$

В этом случае из (1) имеем $\delta_4 = 1 - 1/\sqrt[4]{k}$, $\lambda_4 = \sqrt[4]{k} - 1 = \sqrt[4]{k}\delta_4$. Обозначив $\omega_n(4, k) = \eta_n(k)$, из (1.7) получим

$$J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) Y_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) - Y_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\delta_4}\right) J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\eta_n}{\lambda_4}\right) = 0 \quad (3.6)$$

После соответствующих преобразований, трансцендентное уравнение (3.6) принимает вид

$$\operatorname{tg} \eta_n = -\frac{\eta_n}{\delta_4} \frac{\eta_n^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta_n^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.7)$$

Для того, чтобы иметь четкое представление о корнях этого уравнения, необходимо исследовать его правую часть как функцию от η

$$f(\eta) = -\frac{\eta}{\delta_4} \frac{\eta^2 - 3\delta_4 \lambda_4^2}{(3\lambda_4 + 2)\eta^2 + 3\lambda_4^2} \quad (3.8)$$

Прежде всего отметим, что эта функция нечетная, а нас интересует ее поведение только при положительных значениях η .

Приведем некоторые характерные данные из результатов исследования функции (3.8).

Функция (3.8) с возрастанием η возрастает от нуля (причем $f'(0) = 1$), принимая свое максимальное значение ($f'(\eta) = 0$) при

$$\eta = \lambda_4 \left(\frac{6\delta_4}{\sqrt{(3\sqrt{k} + \delta_4)^2 - 4\delta_4} + 3\sqrt{k} - \delta_4} \right)^{1/2}$$

затем убывает, обращаясь в нуль при $\eta = \eta^* = \lambda_4 \sqrt{3\delta_4}$. Имеем точку перегиба ($f''(\eta) = 0$) при $\eta = 3\lambda_4 / \sqrt{3\lambda_4 + 2}$ и асимптоту в урляваниям

$$f(\eta) = -\frac{\eta}{(3\lambda_4 + 2)\delta_4}$$

Из приведенных здесь данных о функции (3.8) нетрудно заключить, что корни η_n трансцендентного уравнения (3.7), аналогично ξ_n , находятся в интервалах (3.3).

В табл. 2 приведены значения нескольких корней уравнения (3.7) при двух значениях k ($k = 2, k = 10$).

ТАБЛИЦА 2

n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$	n	$\eta_n(2)$	$\eta_n(10)$
1	1.7982	2.3603	4	11.0326	11.1559
2	4.7976	5.0853	5	14.1660	14.2701
3	7.9057	8.0885	6	17.3024	17.3879

Рассматривая значения корней $\xi_n(k)$ (при $m = 2$) и $\eta_n(k)$ (при $m = 4$), можно заметить, что при одном и том же значении k они мало отличаются друг от друга (в особенности при $k = 2$).

Что же касается решениям $u_2(\alpha, t)$ и $v_3(\beta, t)$, хотя они после преобразований выражаются через элементарные функции, здесь не будем приводить из-за громоздкости их выражений.

Литература

1. *Гаспарян А. Е., Хачатрян А. А.* О продольных колебаниях стержней с переменными поперечными сечениями.- Изв. АН Армении, Механика, 1993, т.46, № 3-4, с.36-41.
2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле.- М.: Физматгиз, 1959. 440с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
6.04.1993