

**ОТРАЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ГАУССОВА ПУЧКА ОТ СВОБОДНОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

Багдоев А.Г.

Բազդոբև Ա. Գ.

Ոչ գծային գառայան փնջի անդրադարձումը մագնիսաառուսձգական  
կիսադարձություն ազատ մակերևույթից

\* Իրականացվում է մագնիսաառուսձգական կիսադարձությունում գառայան փնջի անդրադարձումը ազատ ներքից: Արտաձգված են կարճ ալիքների հավասարումները, որոնք նկարագրում են ընկնող և անդրադարձող ալիքները, ըստ որում էլկոնստրուկտիվ միջինացված մեծությունների էվոլյուցիոն հավասարումներն իրարից անկախ են: Արտաձգված են, գառայան փնջի տեսքով, լուծումները: Դիտարկված է նաև ռեզոնանսային խնդիրը, որում կան հանդիպակաց գառայան փնջեր:

A.G. Bagdoyev

Reflection of Nonlinear Gaussian Beam from Free Surface of Magnetoelastic Halfspace

В работе рассматривается задача отражения гауссова пучка, генерируемого на некоторой глубине в магнитоупругом полупространстве от его свободной границы.

Выведены уравнения коротких волн, описывающие поля падающей и отраженной волн, причем указанные эволюционные уравнения для осредненных по эйконалам величин оказываются несвязными. Решения полученных уравнений ищется в виде ряда гармоник, получены уравнения для первой и второй гармоник и решение в виде узких гауссовых пучков. Рассмотрена также задача о резонансе, в котором имеются падающие слева и справа гауссовы пучки.

1. **Получение уравнения для двух пучков** Пусть на некоторой глубине магнитоупругой среды, занимающей полупространство, имеется квазимонохроматическая волна в виде гауссова пучка. Обозначим через  $x = l$  расстояние от волны до свободной поверхности, координата  $X$  отсчитывается от волны, координата  $y$  есть нормальная к  $X$ , отсчитываемая вдоль фронта невозмущенной начальной волны. Кроме падающей на свободную поверхность волны имеется также отраженная волна.

Покажем, что для типичной дифракционной [1] задачи, в которой имеются лишь первые и вторые гармоники и свободные члены не влияют на их уравнения, можно проводить суперпозицию волн. Для этого используем результаты работ [2,3,4], причем в отличие от [4] выбираем произвольное число уравнений и искомым функций, а также рассматриваем возможность наличия любого числа волн.

Кроме того, рассматривается случай трех независимых переменных.

Уравнения движения среды можно описывать в виде системы уравнений с гиперболическим типом в левой части

$$a_{ii}^{j\lambda}(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda} + b^j(u) = a_{ii}^{j\lambda} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda} + a_{iii}^{j\lambda} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^\lambda \partial x^\lambda \partial x^\lambda} \quad (1.1)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, 3; x^0 = t)$$

где  $u = (u^i)$  - неизвестный вектор поля.

В правой части (1.1) стоят малые диссипация и дисперсия, не влияющие на уравнения в основном порядке, то есть соотношения характеристик.

Решение (1.1) ищется в виде лучевого ряда

$$u^i = \sum_{q=0}^{\infty} \omega^{-q} u_q^i(t, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, y) \quad (1.2)$$

где  $\omega^{-1} \ll 1$  есть параметр возмущений,  $\xi_i = \omega \varphi_i$ ,  $\xi_1 = t + \frac{x}{c_n}$ ,

$\xi_2 = t - \frac{x}{c_n}$ ;  $c_n$  - скорость волны линейной задачи,  $\varphi_i$  - фазовые функции,

$u_0$  - невозмущенное решение, не зависящее от  $\xi_i$ . В работе [4] взято  $N = 2$  и не учтена зависимость  $u_q(y)$ , хотя все выкладки повторяются. Учтем, что

$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \omega \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$  и подставляя (1.2) в (1.1), получим в нулевом приближении уравнение характеристик

$$\left\{ A(x, p) \right\}_{p_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}} = \left\{ \det a_i^{\lambda k}(u_0) p_\lambda \right\}_{p_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}} \quad (1.3)$$

Если мы обозначим собственные векторы системы (1.3) через  $h_1, \dots, h_N$ , то решение (1.1) можно записать в первом и втором порядке в виде

$$u_1^i = \Gamma^m(t, \xi_m, y) h_m^i \quad (1.4)$$

$$u_2^i = \Sigma^m(t, \xi_m, y) h_m^i \quad (1.5)$$

где  $\Gamma^m$  и  $\Sigma^m$  - произвольные дифференцируемые функции, причем необходимо отметить, что  $\Gamma^m$  зависит от одного  $\varphi_m$  и по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.1), умножая на  $\bar{h}_j^m$ , где  $\bar{h}_j^m$  - собственные векторы транспонированной матрицы  $A(x, p)$  и принимая, что  $a_i^{\lambda k} \bar{h}_j^m h_m^i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x^\lambda} = 0$  определяя по переменным  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, \xi_{m+1}, \dots, \xi_N$ , можно в первом порядке получить в силу произвола в выборе компонент собственного вектора  $h_m^i$ , как и в [2], для нормальной к волне скорости частиц [1.5]  $u = u_1 - u_2$ ,  $u_{1,2} = \Gamma^{1,2}$  уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} L(u_{1,2}) = -\frac{1}{c_n} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left( \Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} - D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right) \quad (1.6)$$

$$\text{где } \xi_{1,2} = -\tau_{1,2} + \frac{l}{c_n}$$

$$\text{а поперечный оператор } L = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2)$  есть дисперсионное уравнение для первой волны,  $(\alpha_1, \alpha_2)$  - компоненты волнового вектора и поскольку ось  $x$  нормальна к начальной волне, можно считать  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{c_n}$ , где  $c_n$  - нормальная скорость вол-

ны. Уравнения выписаны только для одной прямой ( $\Gamma^1$ ) и отраженной ( $\Gamma^2$ ) от свободной поверхности среды волны,  $\Gamma$  - коэффициент в разложении нормальной скорости волны по степеням малого возмущения нормальной скорости частицы ( $u_i = \Gamma^i$ ) к волне, причем в силу произвола  $\bar{h}_j^m$ ,  $u = u_1 - u_2$ .

2. Уточнение коэффициентов уравнений коротких волн для магнитоупругой среды. Для одной волны коэффициенты уравнения коротких волн определены в [3,5] и равны для случая нормального к волне начального магнитного поля  $H_y = 0$ ,  $H_x = H_0$

$$c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2)\Gamma = \frac{3}{2}(c_n^2 - a^2)a_1^2 - \frac{1}{\rho_0}(c_n^2 - b^2 - a_1^2)\left(A + 3B + C + \frac{3}{2}\lambda_0 + 3\mu\right) \quad (2.1)$$

$$K = \lambda_0 + \frac{3}{2}\mu, \quad A, B, C - \text{нелинейные упругие модули, } D_1 = c_n^2(2c_n^2 - a^2 - b^2 - a_1^2)$$

$$D_1 D = -\frac{c_n}{2}(c_n^2 - b^2 - a_1^2) \frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(0)}}{\rho_0} - a_1^2 c_n \frac{\lambda^{(0)} c_n^2 - a^2}{2\rho_0 c_n^2 - b^2},$$

$$D_1 E = \frac{c_n}{2}(c_n^2 - b^2 - a_1^2) \frac{\zeta^{(1)} + 2\zeta^{(0)}}{\rho_0} + a_1^2 c_n \frac{c_n^2 - a^2 \zeta^{(0)}}{c_n^2 - b^2 2\rho_0}, \quad a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\rho_0}$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^l + \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^e$ ;  $\sigma_{ij}^l$  - нелинейный упругий тензор напряжений,

$$\sigma_{ij}^l = \lambda^{(1)} \delta_{ij} \operatorname{div} \bar{v} + \lambda^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij}^e = \zeta^{(1)} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{v} + \zeta^{(1)} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial t}$$

Коэффициент  $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}$  получится из уравнения  $c_n^4 - c_n^2(a^2 + b^2 + a_1^2) + a^2 \frac{H_n^2}{4\pi r_0} + b^2 \left( a^2 + a_1^2 - \frac{H_n^2}{4\pi r_0} \right)$  в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = \frac{c_n^2 \mu_1^2 - \bar{\omega} v}{c_n^3 \mu_1^3} \left\{ (a^2 - b^2) a_1^2 - c_n^2 (a^2 + b^2 + a_1^2) \right\} + \frac{2c_n^2 (a^2 + a_1^2) b^2 \mu_1^2 - \bar{\omega} v (c_n^4 - a^2 b^2 - b^2 a_1^2)}{c_n^3 \mu_1^3} \quad (2.2)$$

$$\bar{\omega} = c_n^4 - c_n^2 (a^2 + b^2 + a_1^2) + b^2 (a^2 + a_1^2) \quad (2.3)$$

$$\mu_1 = 2c_n^2 - a^2 - a_1^2 \quad (2.4)$$

$$v = 6c_n^2 - a^2 - a_1^2 - b^2 \quad (2.5)$$

Медленная волна [5] есть малая более высокого порядка.

В соотношениях (2.1)-(2.5)  $a$ ,  $b$  - скорости продольных и поперечных волн,  $H_0$  - невозмущенное магнитное поле. Поскольку  $c_n$  входит в четной степени в коэффициенты (1.6), совпадение этих уравнений обеспечивается. Исключение составляет минус перед  $\Gamma^2 \Gamma$ .

**3. Получение уравнений для амплитуд и фаз квазимонохроматической стационарной волны.** Решение уравнений (1.6) можно искать в виде волн модуляции  $u_{1,2} = \Gamma^{1,2}$  [7]

$$u_{1,2} = \left\{ U_{1,2}^{(0)} + U_{1,2}^{(1)} e^{i\alpha x_{1,2} - i\omega t - \nu_1 a^2 t} + U_{1,2}^{(2)} e^{2i\alpha x_{1,2} - 2i\omega t - 2\nu_1 a^2 t} + \text{к.с.} \right\} \quad (3.1)$$

$$\tau'_{1,2} = \mp \frac{x}{c_n}, \quad \tau_{1,2} = \tau'_{1,2} - t + \frac{l}{c_n}$$

$u_{1,2}$  - компоненты нормальной к волне скорости частиц, где  $\alpha$  - основная частота,  $\omega$  - модуляционная частота,  $U_{1,2}^{(0,1,2)}$  - амплитуда гармоник. В силу произвола выбора собственных компонент вектора можно полагать  $h_1^1 = 1$ ,  $h_2^1 = -1$ ,  $u = u_1 - u_2$ , что использовано при получении (1.6).

Подставляя (3.1) в (1.6) и приравнивая слагаемые при гармониках, можно получить дисперсионное соотношение из уравнения при первой гармонике в нулевом порядке

$$\omega = \xi\alpha^3, \quad v_1 = -D, \quad \xi = -\frac{E}{c_n}$$

и уравнения первой и второй гармоник

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau'_{1,2}} (i\alpha + 2v_1\alpha^2 + 3i\omega) - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{y} \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} = \\ & = -\Gamma (i\alpha - v_1\alpha^2)^2 U_{1,2}^{(0)} U_{1,2}^{(1)} + \frac{\Gamma}{c_n} \alpha^2 \frac{\partial^2 U_{1,2}^{(0)}}{\partial y^2} \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} e^{-2v_1\alpha^2 r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & U_{1,2}^{(2)} 4(-3\omega\alpha + iv_1\alpha^2) + 2(i\alpha + 30i\omega + 10v_1\alpha^2) \frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial \tau'_{1,2}} - \\ & - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 U_{1,2}^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{y} \frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial y} = \frac{2\Gamma\alpha^2}{c_n} U_{1,2}^{(1)2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнение нулевой гармоники  $U_{1,2}^{(0)} \sim v_1\alpha U_{1,2}^{(1)2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau'_{1,2}}$ .

Следует рассмотреть случай при  $\frac{\omega}{\alpha} \ll 1$ , при условии, что в дифракцион-

ной задаче  $\frac{\partial}{\partial y} \sim \alpha^2$ :

а)  $\omega \sim \frac{\partial}{\partial \tau'_{1,2}}$ ,  $v_1\alpha \ll \frac{\alpha}{\omega}$  и в уравнении (3.2) слагаемое с  $U_{1,2}^{(0)}$  можно от-

бросить. Тогда получатся уравнения для  $U_{1,2}^{(1)}$ ,  $U_{1,2}^{(2)}$ ;

б)  $\omega \gg \frac{\partial}{\partial \tau'_{1,2}}$ . При этом в уравнении (3.3) можно отбросить производные

$U_{1,2}^{(2)}$  и получить

$$U_{1,2}^{(2)} = -\frac{\Gamma\alpha^2 U_{1,2}^{(1)2}}{2(3\omega\alpha - iv_1\alpha^3)} \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.2), можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial \tau'_{1,2}} (i\alpha + 3i\omega + 2v_1\alpha^2) - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{\partial^2 U_{1,2}^{(1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{y} \frac{\partial U_{1,2}^{(1)}}{\partial y} = \\ & = -\frac{\Gamma^2}{2c_n^2} \frac{\alpha^3}{3\omega - iv_1\alpha^2} U_{1,2}^{(1)2} U_{1,2}^{(1)*} e^{-2v_1\alpha^2 r} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $U_{1,2}^{(1)*}$  комплексно сопряжено с  $U_{1,2}^{(1)}$ . Следует отметить, что при получении (3.5) использовано условие  $\omega\tau'_{1,2} \gg 1$  и если считать  $v_1\alpha^2 \sim \omega$ , следует учитывать экспоненту в (3.4), что осложняет решение. Однако, поскольку  $v_1$  и  $\omega$  входят в виде действительной и мнимой части и при  $v_1\alpha^2 \ll \omega$ , диссипация влияет на решение, что видно из дальнейшего.

Пусть нисходящая волна представляет гауссовый пучок квазимонохроматической волны с заданным значением  $c_n$  (быстрая волна)

$$u_1 = U_1^{(1)}(0) \exp(-i\alpha t - i\omega t - v_1\alpha^2 t) + \text{к.с.}, \quad U_1^{(1)}(0) = a_0 \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

Тогда можно искать решение (3.5) в виде гауссова пучка падающей и отраженной волн  $U_{1,2}^{(1)} = ae^{i\varphi}$

$$u_{1,2} = \frac{a_0 \exp(i\alpha\tau'_{1,2} - i\omega\tau'_{1,2} - v_1\alpha^2\tau'_{1,2})}{f_{1,2}(\tau'_{1,2})} \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f_{1,2}^2(\tau'_{1,2})} + i\varphi_{1,2}(\tau'_{1,2}, y)\right) + \text{к.с.} \quad (3.6)$$

$$u = u_1 - u_2$$

Подставляя (3.6) в (3.5), можно в осесимметричной задаче получить для  $f_{1,2}(\tau'_{1,2})$  и  $\varphi_{1,2}(\tau'_{1,2}, y)$  систему уравнений, которая имеет решение

$$\varphi_{1,2}(\tau'_{1,2}, y) = \sigma_{1,2}(\tau'_{1,2}) + \frac{y^2}{2R_{1,2}}$$

$$-\frac{d\sigma_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_1 \frac{K_2}{f_{1,2}^2} - \frac{1}{\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{2}{f_{1,2}^2 y_0^2} \quad (3.7)$$

$$-\frac{1}{f_{1,2}} \frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \chi_2 \frac{K^2}{f_{1,2}^2} + \frac{1}{\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{R_{1,2}}$$

$$\frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} = \mp \sqrt{C' - \frac{\bar{\xi}}{f_{1,2}^2}} \quad (3.8)$$

$$\text{где } \bar{\xi} = -\chi_1 \frac{4}{\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{a_0^2}{y_0^2} + \frac{4}{y_0^4} \left( \frac{1}{\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \right)^2 - \chi_2^2 a_0^4$$

$$C' = \left( \frac{1}{R_0} \frac{1}{\alpha\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} + \chi_2 a_0^2 \right)^2 + \bar{\xi}, \quad a_0 = K$$

где  $R_0$  есть значение  $R_1$  при  $x = l$

$$\chi_1 = 3E\alpha^2\zeta, \quad \chi_2 = D\alpha\zeta, \quad \zeta = \frac{1}{2c_n\alpha} \frac{\Gamma^2 \exp(-2v_1\alpha^2 t)}{9E^2\alpha^2 + D^2}$$

В силу симметрии можно полагать  $f_2(x) = f_1(x)$ ,  $f_1 = f$  и (3.8) дает

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{df_1}{dx}, \quad \pm \frac{1}{f} \frac{df}{dx} = \chi_2 \frac{K^2}{f^2} + \frac{1}{c_n \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{R_{1,2}}$$

Тогда получится

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{C' - \frac{\bar{\xi}}{f^2}}, \quad -\frac{l-x}{c_n} = \frac{\sqrt{C'f^2 - \bar{\xi}}}{C'} - \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'},$$

$$f^2 = \frac{\bar{\xi}}{C'} + \left( \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{\sqrt{C'}} - \sqrt{C'} \frac{l-x}{c_n} \right)^2$$

Из (3.7) получится

$$A' = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{2}{y_0^2} - \chi_1 K^2, \quad c_n \frac{d\sigma_{1,2}}{dx} = \pm \frac{A'}{f^2}$$

Отсюда можно найти

$$\sigma_{1,4} = \pm \frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}} - C' \frac{l}{c_n} + C' \frac{x}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}} + \sigma_{01,4}$$

$$\sigma_{01} = -\frac{A'}{\sqrt{\bar{\xi}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}} - C' \frac{l}{c_n}}{\sqrt{\bar{\xi}}}$$

$$\sigma_{02} = -\sigma_{01} + \pi$$

Для немалых значений  $y_0$  может образоваться каустика [5]. Решение  $u = u_1 - u_2$  имеет вид

$$u = e^{-\nu_1 \alpha^2 t} \frac{2K}{f} \cos \left( \sigma_1 + \frac{1}{R_1} \frac{y^2}{2} + \frac{l-x}{c_n} \alpha - \alpha t - \omega t \right) -$$

$$- \exp(-\nu_1 \alpha^2 t) \frac{2K}{f} \cos \left( \sigma_2 + \frac{1}{R_2} \frac{y^2}{2} + \frac{x+l}{c_n} \alpha - \alpha t - \omega t \right)$$

откуда получится

$$u = \exp \left( -\nu_1 \alpha^2 t - \frac{y^2}{y_0^2 f^2} \right) \frac{4K}{f} \cos \left( \frac{1}{R_1} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{R_2} \frac{y^2}{2} + \frac{l}{c_n} \alpha - \alpha t - \omega t \right) \times$$

$$\times \cos \left( \frac{1}{R_2} \frac{y^2}{2} - \frac{1}{R_1} \frac{y^2}{2} + \frac{x}{c_n} \alpha + \sigma_1 \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = -2 \frac{\frac{df}{dx}}{f \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}}$$

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} = -2 \frac{\chi_2 K^2 \alpha \alpha_1}{f^2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}}$$

При выборе  $\sqrt{C' - \bar{\xi}} = C' \frac{l}{c_n}$  получится  $\frac{df}{dx} = 0$  на границе  $x = 0$  и

условие  $\sigma_x = 0$  удовлетворится на всей поверхности.

Указанная задача представляет стоячую волну в интерферометре со свободной нижней поверхностью и заданным в начальном сечении гауссовым пучком.

Из условий на эллиптической поверхности  $x = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ,  $\sigma'_x = \frac{H_y^2}{8\pi\rho_0}$ , где  $\sigma'_{i,k}$  есть компоненты тензора Максвелла

$$\sigma'_{ik} = \sigma_{ik} + \frac{H_i H_k}{4\pi\rho_0} - \frac{1}{2} \frac{H^2}{4\pi\rho_0} \delta_{ik}, \quad \sigma'_{xy} = \sigma_{xy} + \frac{H_0 h_y}{4\pi\rho_0}, \quad \sigma'_x = \sigma_x + \frac{H_0^2}{8\pi\rho_0}$$

и уравнений индукции

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -(\bar{H}_0 \nabla) \bar{v} + (\bar{v} \nabla) \bar{H}_0 + \bar{H}_0 \operatorname{div} \bar{v}, \quad \bar{\Pi} = \bar{\Pi}_0 + h$$

можно получить, отбрасывая малые члены [1.5]  $h_x = 0$ ,  $h_y = 0$ ,  $\sigma_x = 0$ ,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Решение (3.9) для больших  $\frac{\alpha l}{c_n}$  удовлетворяет условию  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  при учете узости по  $y$  возмущенной области.

Приведенный аппарат можно использовать и в задаче о встречных пучках в интерферометре [6].

В указанной проблеме следует считать функцию  $f(x)$  гладкой и полагать

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \text{ откуда } l = \frac{c_n \sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'}$$

Тогда получится  $f^2 = \frac{\bar{\xi}}{C'} + \frac{C' x^2}{c_n^2}$  и для фазы

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{A'}{f_0^2} \sqrt{\frac{\xi c_n^2}{C'^2 \alpha^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C' \alpha^2}{\xi c_n^2}} x + \sigma_{01,2}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{A'}{c_n f_0^2} \sqrt{\frac{\xi c_n^2}{C'^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C' \alpha^2}{\xi c_n^2}} x + \Delta$$

где  $\Delta$  находится из того, что при  $x = l$  для резонатора суммарная фаза равняется нулю, откуда получается  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{\alpha}{c_n} l$  при  $x = l$ . Следуя работе [6], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси  $X$ , можно записать аналогичные соотношения на зеркалах

$$|u_B|^2 = R|u_F|^2; (1-R)K_0^2 = u_F^2 + R u_B^2 - 2\sqrt{R} u_F u_B$$

Первые соотношения означают равенство мощности отраженной волны  $(u_B)^2$  значению мощности падающей волны  $(u_F)^2$ , умноженной на квадрат коэффициента отражения, второе есть равенство скорости частиц  $u_B$  прямой волны скорости частиц прошедшей части начальной волны  $K_0 \sqrt{1-R}$  плюс скорости частиц отраженной части обратной волны [6]

$$u_F = K_0 \sqrt{1-R} + u_B \sqrt{R}, \quad K_0 = |K_0| \cos \alpha t$$

Для коэффициента пропускания интерферометра принято полагать

$$P = \frac{|u_F|^2 (1-R)}{|K_0|^2}$$

Поскольку  $u_{1,2} = |u_{1,2}| \cos \Phi_{1,2}$ ,  $\Phi_{1,2} = (-\omega t + \alpha \tau_{1,2} + \Phi_{1,2})$ , можно, интегрируя по  $\alpha t$  от 0 до  $2\pi$ , вышеописанное уравнение найти в виде

$$|u_F| = K \quad \text{и}$$

$$(1-R)|K_0|^2 = K^2(1-R)^2 + K^2 4R \sin^2 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}$$

Пропускная способность примет вид

$$P = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}}$$

Сюда нужно подставить значение  $\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\alpha l}{c_n}$ . Требуя, чтобы аргумент арктангенса в  $\alpha_1 - \alpha_2$  при  $x = l$  равнялся 1, как и в [6], можно получить

$$C' = 2\bar{\xi}, \quad \frac{1}{R_0} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} + \chi_2 K^2 = \sqrt{\bar{\xi}}$$

Для интерферометра имеет место условие [6]

$$f_0^4 = \frac{1}{4} \frac{(2|R_0^*| - 2l)^2}{R_0^{*2}}, \quad R_0^* = R_0 \frac{\alpha}{c_n}$$

Отсюда  $1 = \frac{\bar{\xi}}{C'} + \frac{l}{|R_0^*|}$ . Окончательно получится  $P = \frac{K^2(1-R)}{K_0^2}$

$$P = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta - F)}, \quad \delta = -\frac{2\alpha l}{c_n}, \quad F = -\frac{\pi}{4} \frac{l + x'}{\sqrt{1+x'}}$$

$$x' = \frac{\chi_1 K^2}{\alpha_1}, \quad \mu = -\frac{c_n}{\alpha^2 y_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}$$

при  $\chi_2 = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} < 0$ .

Полученные уравнения дают неявное значение  $x'$ . Можно отметить, что

$R_{1,2} = \frac{c_n}{\alpha} R_{1,2}^*$ , где  $R_{1,2}^*$  - радиусы кривизны прямой и обратной волн и из

(3.8), считая, что  $f_1 = f_2$ ,  $\tau'_{1,2} = \pm \frac{x}{c_n}$ , получить при  $x = l$

$$\mp \frac{df(l)}{dx} = \frac{1}{c_n} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{R_{1,2}^*(0)} + \chi_2 K^2$$

что дает

$$-\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{c_n} \frac{1}{R_2^*(0)} - 2\chi_2 K^2 = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \frac{1}{c_n} \frac{1}{R_1^*(0)}$$

При больших  $(K_0)$  левая часть уравнения  $P$ , являющаяся прямой линией, имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам, приводя к явлению [6] бистабильности.

Аналогичные рассуждения применимы к вышерассмотренной задаче об отражении гауссова пучка от свободной поверхности.

## Литература

1. *Bagdoyev A.G., Petrosian L.G.* Nonlinear waves in mixture of magnetic fluid with gas bubbles. - Amse press, 1987, vol.7, №.4, pp.53-62.
2. *Канер В.В., Руденко О.В.* О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах. - Вестник Московского университета. Сер. физич., астрономии. 1978, т.19, с.78.
3. *Hunter J.K., Keller J.B.* Weakly nonlinear high frequency waves. - Conim. Pure Appl. Math., 1983, 36, p.547-563.
4. *Carbone P.* High frequency waves in quasilinear inviscid gasdynamics. - ZAMP, vol.37, №.1.
5. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. - Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981, 309 с.
6. *Marburger J.H., Felber F.S.* Theory of a lossless Fabry-Perot Interferometer. - Phys. Rev. A 1978, vol.17, №.1, p.336-342.
7. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды. - Изв. АН РА, Механика, 1991, т.44, №.1, с.28-36.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
26.02.1993