

УДК 532.591:534.22.2

ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

Оганян Г.Г.

Օհանյան Գ.Գ.

Միաչափ ալիքները գազահեղուկ խառնուրդում

Դիվարկվում են այնպիսի գազահեղուկ միջավայրեր, որոնք սահմանային իզոթերմիկ և ադիաբատիկ ծայրի արագությունները մոտ են իրար: Սրապես են գրգռումների վազը նկարագրող ապիմվտիկ բանաձեւը ալիքի ճակատից հետո կներկում: Ցույց է տրված, որ երկար ալիքային մոլալորությունում միջֆազային ջերմափոխանակությունը խցելովտում է իսկ կարճալիքային մոլալորությունում ուժեղացնում է գրգռումների մարումը:

Ohanian G.G.

One Dimensional Wave in Gas-Fluid Mixture

Исследуется волновое движение в газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Полученное уравнение в предельных случаях переходит в уравнения, описывающие волновой процесс в средах, в которых термодинамическое поведение пузырьков близко либо к изотермическому, либо к адиабатическому.

В наиболее общей постановке система уравнений движения газожидкостной монодисперсной бесстолкновительной смеси с учетом несовпадений давлений и температур в фазах, а также эффектов сжимаемости и вязкости фаз приведена в [1]. Теоретическое исследование волновых процессов в рамках односкоростной и однотемпературной модели газожидкостной смеси [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [2,4,5] ввиду того, что исследовались либо чисто изотермический, либо адиабатический термодинамические режимы поведения газового пузырька в жидкости. Физически приемлемое истолкование результатов проведенных экспериментов дано в [6,7], где впервые подчеркнута важность учета тепловых эффектов, обусловленных межфазным взаимодействием пульсирующего пузырька с несущей жидкостью.

В настоящей работе исследуется волновое движение в специальных газожидкостных средах, в которых величины предельных изотермической и адиабатической скоростей звука в смеси близки одна другой. Методом коротких волн [8,9] выведено двухволновое уравнение, переходящее в предельных случаях в уравнения, описывающие распространение нелинейных акустических волн в смесях, в которых термодинамическое поведение пузырьков

быстро, либо к изотермическому, либо к адиабатическому. В частных случаях отсутствия теплообмена между пузырьком и жидкостью, они совпадают с известными уравнениями [2,3].

Рассмотрена частная задача с начальными условиями. В линейной постановке получены асимптотические формулы, описывающие поведение возмущений далеко впереди и позади фронта волны. Выявлено, что в длинноволновом приближении межфазный теплообмен противодействует затуханию, а в коротковолновом — усиливает эффект затухания.

1. Исходные уравнения. Предположим, что в монодисперсной газожидкостной смеси частицы фаз движутся с одинаковой скоростью. Несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Будем считать, что в рассматриваемой области течения в смеси не происходит сильного пересечения газовой фазы и потому, ввиду существенного влияния температуры на плотность газа в пузырьках, примем, что теплообмен между фазами определяется лишь тепловым сопротивлением газовой фазы. Тогда можно считать температуру жидкости T_1 постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$), при этом, согласно [6,7], учет эффекта теплопроводности газа важен лишь при межфазном взаимодействии с жидкостью. Пренебрегая эффектами образования, дробления, коагуляции и столкновения пузырьков, уравнения движения исследуемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1,7,10]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

$$P_2 - P = (1 - \varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{\rho_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right)$$

$$\frac{\rho_2 \beta}{\rho_1 (1 - \beta)} = \text{const}, \quad \rho_2 R^3 = \text{const}, \quad P_2 = c_{v2} (\gamma - 1) \rho_2 T_2 \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho_1 (1 - \beta) + \rho_2 \beta, \quad P = P_1 (1 - \beta) + P_2 \beta \quad (1.5)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = - \frac{3\gamma\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{3}{2} \frac{(\gamma - 1) k_2 \text{Nu}}{R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.6)$$

$$\varphi_1 = \frac{1,1\beta^{1/3} - \beta}{1 - \beta}, \quad \varphi_2 = \frac{1,47\beta^{1/3} - 0,33\beta}{1 - \beta}$$

Здесь t - время, x - координатная ось, u - скорость частиц смеси, R - радиус пузырьков, β - объемная концентрация газа, $\gamma = c_{p2}/c_{v2}$ - показатель адиабаты газа, $\mu = \mu_1[1 + o(\beta)]$ - динамический коэффициент вязкости смеси, a - скорость звука, k_2 - коэффициент теплопроводности газа, Nu - число Нуссельта, остальные обозначения общепринятые. Индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к параметрам течения жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движения всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2 учитывают конечность величины β и неоднородность газового пузырька в безграничной жидкости [1,7]. Использование уравнения (1.6) позволяет в первом приближении учесть несовпадение температур в фазах.

Комбинируя соотношения (1.4), характеризующие условия сохранения массы газа в пузырьке, и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз, получим

$$\frac{1}{\beta(1-\beta)} \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{3\rho_2}{R} \frac{dR}{dt} \quad (1.7)$$

Учитывая (1.7) и определение плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{(1-\beta)}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} - \frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.8)$$

Используя уравнения (1.7), (1.8) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) находим

$$(1-\beta) \frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt} \left[(1-\varphi_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] = (1-\beta) \frac{dP_1}{dt} + \beta(P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

Комбинирование уравнений импульса смеси (1.2), пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.4) дает

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{P_2}{T_2} \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} + \left[(1-\varphi_1)\rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + \right. \\ \left. + (1-\varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

Исключив из рассмотрения в уравнении (1.6) давление в пузырьке P_2 посредством уравнения состояния калорически совершенного газа (1.4) и используя (1.7), будем иметь

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{3(\gamma-1)T_2}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) = -\frac{3}{2} \frac{k_2 \text{Nu}}{\rho_2 c_{v2} R^2} (T_2 - T_0) \quad (1.11)$$

В зависимости от величины теплообмена между пузырьком и жидкостью в газожидкостных смесях скорость распространения возмущений в предельных случаях совпадает либо с изотермической a_i , либо с адиабатической a_f скоростями звука в смеси, которые задаются формулами [2,3,11]

$$\frac{1}{a_{i0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{i0}a_{i0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{P_0} = 0, \quad \frac{1}{a_{f0}^2} - \frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{i0}a_{i0}^2} - \frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0} = 0 \quad (1.12)$$

Здесь и далее индекс 0 отнесен к состоянию покоя. Первый из режимов реализуется при $\text{Nu} \rightarrow \infty$, а второй - при $\text{Nu} \rightarrow 0$. Дифференцируя по ρ_i тождество $P_i(\rho_i, s_i) = P_i[\rho_i, T_i(\rho_i, s_i)]$ и учитывая постоянство температуры в жидкости, нетрудно показать, что $a_{i*} = a_{if} = a_i$.

2. Асимптотические разложения. Предположим, что по невозмущенной покоящейся смеси в направлении оси x распространяется волна, в которой избыточные значения всех параметров течения малы по сравнению с начальными. Примем, что величины возмущений параметров имеют такой же порядок малости, что и массовая скорость частиц смеси

$$u = \varepsilon a_0 u', \quad P = P_0(1 + \varepsilon P'), \quad P_i = P_0(1 + \varepsilon P'_i), \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon \rho')$$

$$\rho_i = \rho_{i0}(1 + \varepsilon \rho'_i), \quad T_2 = T_0(1 + \varepsilon T'), \quad R = R_0(1 + \varepsilon R'), \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon \beta' \quad (2.1)$$

$$a_i = a_{i0}(1 + \varepsilon a'_i), \quad (i=1,2)$$

Здесь ε - безразмерный малый параметр. Рассматриваемую область течения считаем областью коротких волн. В этой области, примыкающей к ударному фронту, изменения избыточных величин, характеризующих возмущенное течение, происходит весьма быстро, несмотря на их малость. Ширина области течения, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Поэтому, для последующих преобразований и упрощений уравнений п.1, введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 невозмущенной смеси [8,9]

$$t = \frac{L}{a_0 \Delta} \bar{t}, \quad x = a_0 t + Lx_1 \quad (2.2)$$

где L - характерная длина в направлении оси, Δ - второй безразмерный малый параметр. Напомним, что a_0 , в предельных случаях совпадает либо с изотермической $a_{0,0}$, либо с адиабатической $a_{f,0}$ скоростями звука в смеси. При упрощении уравнений в дальнейшем будут удержаны лишь главные (порядка 1) и старшие (порядка ϵ) члены и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (1.1)-(1.3) и (1.7)-(1.10), удержим главные члены. Учитывая, что в системе координат (x, t) волна распространяется по покоящейся смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$\begin{aligned} \rho = u, \quad P = P_1 = P_2 = \frac{\rho_0 a_0^2}{P_0} u, \quad \rho_1 = \frac{1}{1 - \beta_0} (u + 3\beta_0 R) \\ \rho_2 = -3R, \quad R = -\frac{\rho_0 a_0^2}{3P_0} u, \quad \beta = \beta_0 (u + 3R) \end{aligned} \quad (2.3)$$

В рассматриваемой газожидкостной смеси пусть величины (1.12) невозмущенных предельных скоростей звука $a_{e,0}$ и $a_{f,0}$ близки одна другой. По предположению, скорость a_0 распространения волны малой, но конечной интенсивности, не совпадает ни с $a_{e,0}$, ни с $a_{f,0}$ и потому примем

$$a_0 - a_{e,0} = \epsilon a_0 \sigma_e, \quad a_{f,0} - a_0 = \epsilon a_0 \sigma_f \quad (2.4)$$

Очевидно, что σ_e и σ_f - постоянные величины порядка единицы, связанные между собой, согласно формулам (1.12), соотношением

$$\sigma_e = -\sigma_f + \frac{1}{\epsilon} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta_0 \rho_0 a_0^2}{2P_0} \quad (2.5)$$

Отсюда следует $(\gamma - 1) \sim \epsilon$, что соответствует пузырькам, наполненным многоатомным газом (например, пропаном C_3H_8 при 0,1 МПа и $T = 280^\circ K$).

Комбинирование уравнений состояния газа, (1.8) с формулой $dP_1 = a_1^2 d\rho_1$ позволяет записать уравнение неразрывности в форме, удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к изотермическому

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \beta_0) P_2}{T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} - \frac{3T_2}{R} \frac{dR}{dt} \right) - \\ \frac{d}{dt} \left[(1 - \varphi_1) \rho_1 R \frac{d^2 R}{dt^2} + (1 - \varphi_2) \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1} \frac{d}{dt} \left(P_2 - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} \right) \right] - \\ - \rho_1 a_1^2 \left(\frac{3\beta}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \beta (P_2 - P_1) \left(\frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ввиду того, что искомое уравнение должно быть получено из упрощенных в порядке ε системы уравнений (1.10), (1.11) и (2.6), преобразование (2.2), с учетом определения (2.4), очевидно, можно переписать в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\Delta}{L} a_{*0} \frac{\partial}{\partial t_*} - \frac{a_{*0}}{L} (1 + \varepsilon \sigma_*) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.7)$$

Применим преобразования (2.1) и (2.7) к уравнению (1.11) и при его упрощении оставим главные члены. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} + 3(\gamma - 1) \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{3\gamma}{2} \frac{L^2}{R_0^2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} T, \quad \text{Pe} = \frac{La_0}{\lambda_2} \quad (2.8)$$

Здесь Pe - число Пекле, $\lambda_2 = k_2 (c_{p2} \rho_{20})^{-1}$ - коэффициент температуропроводности газа. Для того, чтобы в (2.8) все члены были одного порядка, необходимо принять

$$T \sim \varepsilon, \quad \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}} \sim \frac{R_0^2}{L^2}$$

откуда следует, что возмущение температуры - величина более высокого порядка малости, чем величина массовой скорости частиц смеси. Разлагая функцию $a_1 = a_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности локального термодинамического равновесия и используя формулы (2.1), (2.3), находим главный член разложения

$$a_1 = (m-1) \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} u, \quad m = \frac{1}{a_{10}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} (\rho_1 a_1) \right]_{10} \quad (2.9)$$

Применение преобразования (2.1), (2.7) к уравнениям (1.10) и (2.6) и их последующее комбинирование позволяет исключить из рассмотрения член порядка единицы $\partial R / \partial x_1$, при этом получаемое упрощенное уравнение, кроме старших членов порядка ε , содержит также член порядка единицы $\partial u / \partial x_1$ с коэффициентом, в точности совпадающим с первой из формул (1.12). В теории коротких волн известно [8,9], что члены порядка единицы упрощенного уравнения связаны с переносом массы и импульса смеси. Поэтому в полученном уравнении вышеупомянутый коэффициент необходимо приравнять нулю, и, тем самым, снова придем к определению (1.12) изотермической скорости звука в смеси. Далее, подставляя соотношения (2.3), (2.9) в члены порядка ε , находим

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha_* u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta_* + \frac{R_0}{L} \frac{a_{*0}}{a_{10}} \delta_* \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d_* \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} = \\ = - \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 La_{*0}}{\mu}, \quad u_1 = \frac{1}{\beta_0} u \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\alpha_* = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{*0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0 a_{*0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2, \quad \delta_* = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\rho_0 a_{*0}^2}{P_0} A_* \right)$$

$$d_* = \frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10} a_{*0}^2}{6P_0} A_*, \quad \delta_* = \frac{A_*}{2}, \quad A_* = \left(1 - \frac{P_0}{\rho_{10} a_{*0}^2} \right) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{*0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Если же исходить от альтернативной формы записи уравнения (1.9), удобной при рассмотрении режима распространения возмущений, близкого к адиабатическому, и проделать аналогичные выкладки, то снова придем к уравнению в порядке ε уравнению (2.10), в котором заменены a_{*0} на a_{f0} , σ_* на σ_f , α_* на α_f , где

$$\alpha_f = m \frac{(1-\beta_0)\beta_0\rho_0^2 a_{f0}^4}{\rho_{10}^2 a_{10}^4} + \frac{\gamma+1}{2} \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{f0}^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]^2$$

Ввиду того, что $(\gamma-1) \sim \varepsilon$, в рассматриваемом приближении (порядка ε) $\alpha_* = \alpha_f = \alpha$ и в коэффициентах уравнения (2.10), везде можно заменить a_{*0} на a_0 , то есть принять $d_* = d_f = d$, $\delta_* = \delta_f = \delta$, $A_* = A_f = A$. Исключив возмущение радиуса пузырька в уравнении (2.8) и комбинируя его с уравнением (2.10), приходим к окончательному уравнению, описывающему распространение возмущений со скоростью a_0 , не совпадающей обязательно с одной из предельных невозмущенных скоростей звука:

$$\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_* + \frac{N}{2} \delta_r \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} =$$

(2.11)

$$= N \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon (\alpha u_1 - \sigma_*) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \left(\frac{1}{\text{Re}} \delta + \frac{R_0}{L} \frac{a_0}{a_{10}} \delta_* \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{R_0^2}{L^2} d \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \right]$$

$$N = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{L^2} \frac{\text{Re}}{\text{Nu}}, \quad \delta_r = (\gamma-1) \left[1 - \frac{(1-\beta_0)\rho_0^2 a_0^2}{\rho_{10} a_{10}^2} \right]$$

Здесь вторые слагаемые в круглых скобках ответственны за учет эффекта сжимаемости жидкой фазы и исходят от уравнения (1.3). Существует и иной альтернативный подход к учету сжимаемости, предложенный в [1].

Для сохранения требования сплошности рассматриваемого континуума при воздействии на него умеренных ($P_0 \leq 3$ МПа) давлений, обычно [7,12], на величину объемного газосодержания налагается ограничение сверху: $\beta_0 \leq 0,1$. Дл

Уравнение движения манипулятора определим в форме Лагранжа и представим в векторном виде

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha}, M) \quad (1.1)$$

где $M = M_1, \dots, M_n$ — управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, расположенными в шарнирах O_i .

Между обобщенными координатами манипулятора α_i и координатами, определяющими положение схвата, имеется следующая связь:

$$x = \bar{f}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (1.2)$$

Пусть в пространстве переменных $x_i (i=1, 2, 3)$ задана некоторая линия, которую с учетом (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \\ \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функции $\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ в пространстве переменных $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ представляют собой гладкие гиперповерхности. Пересечение Ω этих гиперповерхностей является $(n-2)$ -мерным гладким многообразием, если в каждой точке $\alpha \in \Omega$ векторы $\text{grad } \varphi_i(\alpha) (i=1, 2)$ линейно независимы [1].

Пусть требуется за время $t \in [t_0, T]$ из начального положения $x(t_0) = x^0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}^0$ привести схват манипулятора на линию (1.3) со скоростью $\dot{x}(T) = a$ и с минимизацией некоторого функционала, характеризующего качество переходного процесса:

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(\alpha, \dot{\alpha}, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\{M(t)\} \leq m}} \quad (1.4)$$

Введем фазовые переменные

$$\alpha_i = y_i, \quad \dot{\alpha}_i = y_{i+n} (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

Начальное множество представляет собой $r_0 = (2n-6)$ -мерное гладкое многообразие S^0 , а конечное $r_1 = (2n-5)$ -мерное гладкое многообразие S_1 в пространстве переменных $\{y_i, y_{i+n}\} (i=1, 2, \dots, n)$.

Векторное уравнение (1.1) и функционал (1.4) в фазовом пространстве (1.5) представим в виде

$$\dot{y} = F(y, M), \quad y^0 \in S^0 \quad (1.6)$$

$$J = \int_{t_0}^T \Phi(y, M) dt \rightarrow \min_{\substack{\{M(t)\} \leq m}} \quad (1.7)$$

соответственно.

2. Математическая формулировка и исследование задачи. Пусть движение механической системы описывается векторным дифферен-

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{N + 2\delta}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = N \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)$$

Линейное приближение. Применяя к полученному уравнению преобразование Фурье

$$V(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) \exp(-ikx) dx$$

нетрудно выписать общее решение

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left\{ i \left[dk^3 t - \frac{N^2 k^3 t}{2(1+N^2 k^2)} + kx \right] - \left[\delta k^2 t + \frac{Nk^2 t}{2(1+N^2 k^2)} \right] \right\} dk$$

где спектральная функция $V(k, 0)$ есть Фурье-трансформанта начального условия. Здесь k - безразмерное волновое число.

3. Асимптотические решения. Для получения простых аналитических решений перейдем к исследованию предельных случаев.

Длинноволновое приближение. Полагая $N^2 k^2 \ll 1$, из общего решения находим

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(d - \frac{N^2}{2} \right) k^3 t + ikx - \left(\delta + \frac{N}{2} \right) k^2 t \right] dk \quad (3.1)$$

Коротковолновое приближение. Если же полагать $N^2 k^2 \gg 1$, то из общего решения имеем

$$v(x, t) = \exp \left(-\frac{t}{2N} \right) \int_{-\infty}^{\infty} V(k, 0) \exp \left[i \left(dk^3 t - \frac{kt}{2} + kx \right) - \delta k^2 t \right] dk \quad (3.2)$$

Из решения (3.2) видно, что учет тепловой релаксации в пузырьке приводит к экспоненциальному затуханию во времени амплитуды волны. Такой же закон следует из линейного варианта уравнения, описывающего квазиадiabатический режим распространения волны.

Пусть начальное условие задается в виде

$$v(x, 0) = x^2 \exp(-m^2 x^2), \quad m = \text{const}$$

Тогда, можно искомым спектральную функцию выразить через элементарные

$$V(k, 0) = \frac{1}{4m^3 \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{k^2}{2m^2} \right) \exp \left(-\frac{k^2}{4m^2} \right) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в решение (3.1) и применяя теорему о свертке функций в длинноволновом приближении получим

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 4m^2 \delta_* t)^{-\frac{3}{2}} (3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta_* t + \frac{z^2}{1 + 4m^2 \delta_* t} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 \delta_* t}\right) Ai\left(\frac{x-z}{\sqrt{3d_* t}}\right) dz; \quad \delta_* = \delta + \frac{N}{2}, \quad d_* = d - \frac{N^2}{2} \quad (3.4)$$

где $Ai(y)$ - функция Эйри. При $t \rightarrow 0$, используя свойства функции Эйри [13], нетрудно показать переход решения (3.4) в начальное условие. Разлагая в решении (3.4) функцию Эйри в ряд по степеням z и используя интегральное представление гамма-функций, после применения формулы Лежандра находим

$$v(x,t) = \frac{1}{m(1 + 4m^2 \delta_* t)} (3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3d_* t)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{m^2} \right)^n \times$$

$$\times Ai^{(2n)}\left(\frac{x}{\sqrt{3d_* t}}\right) \left[\frac{2\delta_* t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]$$

Выпишем асимптотические решения далеко впереди и позади фронта волны, для чего воспользуемся предварительно формулами асимптотического разложения производных функций Эйри при больших значениях аргумента [13]. Далее, ввиду сходимости получаемых рядов [14], получаем соответственно:

$$\text{при } x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$$

$$v(x,t) = \frac{(3d_* t x)^{-\frac{1}{4}}}{4m^3} \left(1 + \frac{1}{2m^2} \frac{x}{3d_* t} \right) \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{3d_* t}} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{4m^2} \frac{x}{3d_* t} \right]$$

$$\text{при } x(3d_* t)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2m^3} |3d_* t|^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{2m^2} \left| \frac{x}{3d_* t} \right| \right) \exp \left(-\frac{1 + 4m^2 \delta_* t}{4m^2} \left| \frac{x}{3d_* t} \right| \right) \times$$

$$\times \cos \left(\frac{2}{3} \left| \frac{x}{3d_* t} \right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right)$$

(3.5)

Очевидно, что характер поведения возмущений определяется вторыми слагаемыми в выписанных решениях, при этом далеко впереди волны эффекты вязкости и теп-

лообмена противодействуют, а далеко позади - способствуют затуханию возмущений. В длинноволновом приближении учет межфазного теплообмена аналогичен воздействию второй (продольной) вязкости на процесс распространения возмущений и одновременно приводит к уменьшению эффекта дисперсии.

Перейдем теперь к исследованию распространения линейных волн в коротковолновом приближении. Подставляя выражение Фурье-образа (3.3) начального условия в решение (3.2) и опять применяя теорему о свертке функций, находим

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + 4m^2 \delta t)^{\frac{3}{2}} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\delta t + \frac{z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{m^2 z^2}{1 + 4m^2 \delta t}\right) Ai\left(\frac{x - \frac{t}{2} - z}{\sqrt[3]{3dt}}\right) dz \quad (3.6)$$

Легко проверить, что при $t \rightarrow 0$ данное решение переходит в заданное начальное условие. Как и выше, следуя известной методике [13], решение (3.6) можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{1}{m(1 + 4m^2 \delta t)} (3dt)^{-\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{t}{2N}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (3dt)^{-\frac{2n}{3}} \left(\frac{1 + 4m^2 \delta t}{m^2}\right)^n \times \\ \times \left[\frac{2\delta t}{n!} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{n!} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right] Ai^{(2n)}\left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)$$

Аналогично выводу асимптотических решений (3.5) длинно-волнового приближения, можно получить: при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$ (далеко впереди фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{8m^5} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{2}{3} \left(\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \frac{x - t/2}{3dt}\right]$$

при $\left(x - \frac{t}{2}\right)(3dt)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow -\infty$ (далеко позади фронта волны)

$$v(x, t) = \frac{1}{4m^5} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{4}} \frac{1}{3dt} \exp\left[-\frac{t}{2N} - \frac{1 + 4m^2 \delta t}{4m^2} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|\right] \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \left|\frac{x - \frac{t}{2}}{\sqrt[3]{3dt}}\right|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Таким образом, в коротковолновом приближении межфазный теплообмен усиливает эффект затухания возмущений.

Л и т е р а т у р а

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Кутателидзе С.С., Накоряков В.Е. Теплообмен и волны в газожидкостных системах. - Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. Ван-Вейнгаарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. Реология суспензий. - М.: Мир, 1975, с.68-103.
4. Кузнецов В.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа. //Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с.32-44.
5. Noordzij L., Van Wijngaarden L. Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures. //J.Fluid Mech.1974, v.66, № 1, p.115-143.
6. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. - Изв.АН СССР. МЖГ, 1974, №6, с.30-41.
7. Губайдулин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры. - ПМТФ, 1978, № 2, с.78-86.
8. Гриб А.А., Рыжов О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. - ПМТФ, 1960, № 1, с.63-74.
9. Рыжов О.С. О нелинейной акустике химически активных сред. - ПММ, 1971, т.35, № 6, с.1023-1037.
10. Акуличев В.А. Пульсация кавитационных полостей. // Мощные ультразвуковые поля. - М.: Наука, 1968, с.129-165.
- 11.Оганян Г.Г. Об уравнениях нелинейной акустики газожидкостных сред. Изв.АН АрмССР, Механика, 1988, т.41, № 3, с.25-36.
12. Гельфанд Б.Е., Губин С.А., Когарко С.М., Тимофеев Е.И. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах. - Изв.АН СССР, МЖГ, 1974, № 6, с.58-65.
- 13.Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. - М.: Наука, 1973. 176 с.
14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.12.1990