

УДК 532.59

РЕШЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ВБЛИЗИ КАСАНИЯ
ДИФРАКЦИОННОЙ И ПАДАЮЩЕЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛН
В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С.

Ա.Գ.Բագդդեւ, Գ.Ս.Բեզիրգենյան

Գծային դրվածքով դիֆրակցիոն խնդրի լուծումը դիֆրակցիոն և
ընկնող գրավիտացիոն ալիքների շոշափման կնքի շրջակայքում

Խնդրի լուծումը հանգում է $h = h(x, y)$ փոփոխական խորություն ունեցող անսղմելի հեղուկի ազատ
մակերևույթի $\eta = \eta(t, x, y)$ զրգռման որոշմանը երկրաչափական խառնարի և ընկնող ու փարածվող ալի-
քի տիրույթներում: Մկրտչական պայմանները տալով Կիրիսովի տեսքով և օգտագործելով «սաղո ջրի» վարկա-
ծը և Ադամարի մեթոդը, գրվում է գծային խնդրի լուծումը սահմանային դիֆրակցիոն և փարածվող ալիքների
շոշափման կնքի շրջակայքում: Թեփցային ալիքի դեպքում դիտարկված է ստացիոնար դիֆրակցիայի խնդիրը:
Շույց է ցուցված, որ այս դեպքում ալիքի լայնությունը և փուլը արտահայտվում են Ֆրեյենի ինվերտացիայով:

Bagdоеv A.G., Bezirgenian G.S.

The Solution of the Diffraction Problem the Near Tangency
of Diffraction and Inciding Gravitation Waves in Linear Statement

Используя модифицированный метод Адамара, в линейной постановке с использованием гипо-
тезы "мелкой воды" найдено возвышение $\eta = \eta(t, x, y)$ свободной поверхности жидкости с пе-
ременной глубиной $h = h(x, y)$ вблизи касания фронтов дифрагированной и распространяю-
щейся волн. Показано, что в частном случае скелкообразной волны решение нестационарной задачи
выражается через функцию $\arctg$, что хорошо известно. В последнем случае, для получения из не-
го решения стационарной задачи (которая является более типичной в явлении дифракции) к функ-
ции $\arctg$ применено преобразование Лапласа по времени. Определены амплитуда и фаза волны,
которые выражаются через интегралы Френеля.

Проблема дифракции волн разной природы (гравитационных, акусти-
ческих, электромагнитных) на телах (препятствиях) разной формы в разных
средах является хорошо известной. Имеется многочисленная литература по
дифракции электромагнитных, акустических, гравитационных волн на барье-
рах разной формы в разных средах. Совершенно ясно, что даже краткий об-
зор фундаментальных работ по методике решения этой проблемы неуместно
приводить в статье по понятной причине. Вкратце остановимся на некоторых

из них, в которых предложены разные: аналитические, численные или комбинированные методы решения дифракционных задач.

Из аналитических методов следует отметить некоторые классические методы:

1) Метод Кирхгофа (интегральный метод), являющийся математическим обобщением принципа Гюйгенса-Френеля, основан на точной формуле Грина и описывает решение стационарной задачи дифракции в однородной среде при соответствующих краевых условиях, которые задаются приближенно [1-4] (в области тени их полагают равным нулю, а в освещенной части их принимают такими же, как при отсутствии барьера).

2) Метод Фурье - когда функция, описывающая поле, представляется в виде Фурье-разложения по одной из координат [5-7]. При применении этого метода обычно делается переход от декартовых координат к цилиндрическим (в случае угловых дифракционных областей) или к сферическим (в случае препятствий с гладкой криволинейной границей).

3) Метод Фурье - преобразование, пригодное для стационарных задач дифракции в однородных средах.

Из локальных методов решения дифракционных задач в неоднородных средах, описывающих возмущенное поле в некоторой его части (например, полутени), следует отметить:

а) метод пограничного слоя, основоположниками которого являются Фок [8] и Леонтович [9]. Первоначально этот метод Фок сформулировал как принцип локального поля ([8], с. 15-16);

б) метод Адамара для нестационарных дифракционных задач, который непосредственно использован в этой статье.

Суть метода пограничного слоя, который в дальнейшем был развит Бабичем и др. в работах [10, 11], состоит в нахождении главного члена асимптотического разложения решения стационарной задачи дифракции по обрат-

ным степеням ω , при $\omega \rightarrow \infty$
$$\left(u = \sum_0^{\infty} u_i(M) e^{i\omega \tau(M)} / (-i\omega)^{i+\gamma} \right)$$
 в окрестности фронта волны, то есть в узком слое, имеющем порядок $O\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Суть метода Адамара состоит в том, что решение в любой момент в любой точке [12, 13], расположенной вблизи границы возмущенной области, выражается через начальные условия и фундаментальное (элементарное) решение волнового уравнения.

Уместно отметить, что изучение окрестности касания произвольной волны с дифракционной на основании линейного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами гиперболического типа методом Адамара, проведено в [14]. Обзор работ по решению дифракционных задач численными и комбинированными методами частично можно найти в [2, 7, 15]. Кстати, довольно краткий обзор работ по дифракции приведен в [3].

1. **Физическое описание задачи, основные предположения и математическая постановка.** Пусть одиночная слабая поверхностная гравитационная волна произвольной формы (например, уединенная волна, возбужденная разными причинами: мгновенным порывом ветра, подводным землетрясением или дрейфом) набегают на вертикальный тонкий жесткий полубесконечный барьер с заостренным краем, расположенный в морской или океанской прибрежной зоне. Считается, что в начальный момент $t = 0$ волна, сталкиваясь с волнорезом, касается его заостренного края. Начало координат выберем на кромке препятствия, а за плоскость xOy примем невозмущенную поверхность жидкости. В рассматриваемой задаче возмущенное движение жидкости представляет собой колебательное движение частиц вокруг их невозмущенного состояния.

Основные предположения мелкой воды [5, 7, 16] в линейной теории:

а) амплитуда колебания частиц достаточно мала по сравнению с характерной глубиной жидкости ($\eta_{\max}/h_i \ll 1$);

б) вертикальные ускорения частиц достаточно малы ($|dw/dt| \ll 1$), то есть их влиянием на распределение давления можно пренебречь;

в) глубина воды в прибрежной зоне достаточно мала по сравнению с длиной волны ($h/\lambda \ll 1$, $c = \sqrt{gh}$ - длинная волна), где $h(x, y)$ - глубина воды в невозмущенном состоянии, h_i - характерная глубина воды у барьера, λ - длина волны, c - скорость распространения длинных гравитационных поверхностных волн в воде конечной глубины, а $\eta_{\max}$ - максимальное отклонение свободной поверхности жидкости от ее невозмущенного состояния. На основании предположений а) и б) возмущенное движение несжимаемой весомой идеальной жидкости под воздействием силы тяжести описывается системой линейных уравнений движения и неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1.1, \text{ а-в})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия на дне (моря или океана) и на свободной поверхности запишутся соответственно в форме

$$v_n = 0 \text{ при } z = -h(x, y), \quad w|_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \text{ при } z = \eta \quad (1.3, \text{ а-б})$$

Для полной формулировки задачи (с математической точки зрения) необходимо еще записать начальные условия. Но предварительно покажем, что система уравнений (1.1а-в), (1.2) при граничных условиях (1.3а-б) можно свести к волновому уравнению вблизи фронтов волн.

Расшифруем граничное условие (1.3а). Обозначим через n_0 единичный вектор нормали ко дну. Тогда

$$n_0 = \frac{\nabla(z+h(x,y))}{|\nabla(z+h(x,y))|} = \frac{\partial h/\partial x \bar{i} + \partial h/\partial y \bar{j} + \bar{k}}{|\nabla(z+h(x,y))|}, \quad v_n = (u, v, w)(n_{0x}, n_{0y}, n_{0z})$$

Следовательно,

$$w|_{z=-h} = -\left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}\right) \quad (1.4)$$

Интегрируя уравнение (1.1в) по z в пределах от z до η , получим гидростатический закон распределения давления: $p = p_* + \rho g(\eta - z)$. Подстановка последнего выражения в первые два уравнения движения дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (1.5, a-b)$$

Как видно из (1.5), продольные и поперечные компоненты ускорения частиц не зависят от аппликаты z . С учетом этого факта проинтегрируем уравнение неразрывности по z в пределах от $-h$ до η . Тогда с учетом граничных условий (1.3б) и (1.4) и предположения а) получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

Умножив уравнения (1.5) на h , затем продифференцировав соответственно по x и y , и сложив, с учетом последнего выражения, легко установить, что

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = g \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Сведем последнее уравнение к волновому уравнению. С этой целью произведем замену $\eta = \eta' \exp \Phi(x, y)$, где Φ и ее производные первого и второго порядка являются довольно гладкими функциями, причем Φ подлежит определению. Подстановка такой замены в уравнение дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} \right) - g \left[\left(2h \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \left(2h \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right] = \\ = g \left[h \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] \eta' \end{aligned}$$

Физически очевидно, что вблизи фронта волны

$$\left| \frac{\partial \eta'}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \eta'}{\partial y} \right| \gg \eta'$$

Следовательно, в последнем уравнении слагаемыми типа $\eta' h \times (\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2)$ и того же порядка по сравнению с $\partial^2 \eta' / \partial t^2$, $\partial^2 \eta' / \partial x^2$, $\partial^2 \eta' / \partial y^2$ можно пренебречь. Тогда уравнение, которое получим

ется из последнего после отбрасывания из него слагаемых отмеченного порядка, чтобы стало волновым уравнением, необходимо полагать:

$$2h \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad 2h \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, функция $\eta' = \sqrt{h\eta}$ в окрестности фронтов волн удовлетворяет волновому уравнению.

Семейство лучей. Начальные условия. С целью нахождения решения задачи в любой момент $t > 0$ в окрестности касания точки дифракционной волны с распространяющейся волной и математической записи начальных условий проведем следующее построение.

Физически имеются два семейства поля лучей, которые характеризуются как экстремали интеграла Ферма:

а) дифракционные лучи, исходящие из края экрана, являющиеся источником излучения вторичных возмущений (согласно принципу Гюйгенса-Френеля), за счет которых образуется слабо смачиваемая зона, расположенная за барьером (Огибание волной препятствие - дифракция в узком смысле);

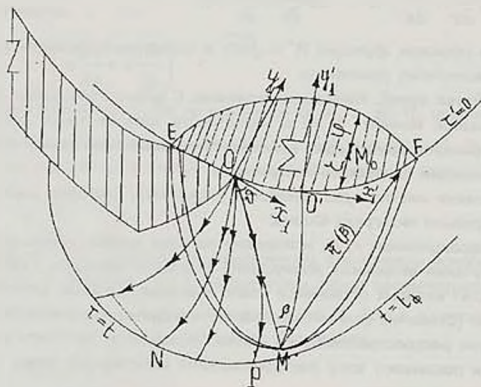
б) лучи распространяющейся волны, которые не являются центральными лучами и покрывают зону распространения набегающей волны после столкновения с волнорезом.

Чтобы описать эти два семейства лучей, введем две системы криволинейных координат: τ, ϑ - для первого семейства и τ', s - для второго семейства. Координата

$$\tau = \tau(0, N) = \min \left(\delta \int_0^N d\sigma / c(x, y) \right)$$

характеризует время пробега возмущений от кромки препятствия до текущей точки возмущенной области вдоль дифракционных лучей, то есть определяет положение точки на луче. Совершенно ясно, что фронт дифракционной волны в любой момент t характеризуется уравнением $\tau = t$. Координата ϑ описывает дифракционные лучи, то есть $\vartheta = \text{const}$ вдоль луча и отсчитывается от фиксированного направления. Координата τ' имеет тот же смысл, что и τ , но уже для падающей на волнорез и распространяющейся волны, а координата s отсчитывается от края экрана вдоль начального фронта волны и фиксирует лучи распространяющейся волны, которые не центральны. Кроме них, введем координатную систему $x, O y_1$, причем ось $O x_1$ направим по касательной к фронту $\tau' = 0$, а $O y_1$ - перпендикулярно к ней (фиг.1). Далее введем расстояния ξ и ϕ , отсчитываемые, соответственно, от текущей точки M_0 , расположенной за фронтом волны $\tau' = 0$ до нее, и от той же точки до квазисферы (полулунок), являющейся обращением фронта дифракционной волны (принцип взаимности

[18]). (В случае однородной среды фронт дифракционной волны является сферой).



Фиг. 1

Геометрическая картина дифракции на остром крае в плане

После таких построений и обозначений, начальные условия представим в форме приближенных условий Кирхгофа [4], то есть

$$\eta'|_{t=0} = \begin{cases} A \zeta^\alpha x_1^\gamma, & \frac{\partial \eta'}{\partial t}|_{t=0} = \begin{cases} \alpha A \zeta^{\alpha-1} x_1^\gamma & \text{при } \zeta \geq 0 \text{ и } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{при } \zeta < 0 \text{ или } x_1 < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.8)$$

где α, γ характеризуют гладкость решения поперек и вдоль волны и могут быть любыми вещественными числами, причем $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\alpha + \gamma \geq -\frac{3}{2}$, а

$A = A_1 c_0^\alpha = \text{const}$, A_1 характеризует интенсивность набегающей волны, а c_0 - скорость волны в точке O , ($c(O) = c_0$). (Объяснения физического смысла допущений, вложенные в приближенных условиях Кирхгофа, приведены в [2], с.248).

2. Решение задачи. Как уже было сказано, решение полученной задачи Коши по [12, 13] в любой момент $t > 0$, в любой точке M возмущенной области выражается через начальные условия и фундаментальное (элементарное) решение волнового уравнения (вернее, сопряженного к нему), найденное Адамаром, которое было конкретизировано (с точки зрения практического приложения) Бабицем [17]. Чтобы в произвольной точке M пространства t, x, y , лежащей правее луча OP , записать решение, необходимо построить обращенный характеристический коноид с вершиной в точке M и образующими, составленными из бихарактеристик волнового уравнения, и

найти его пересечение с плоскостью $t = 0$ (фиг. 1). (Вершина коноида является особой точкой решения линейной задачи). Область интегрирования обозначим через Σ . Она состоит из квазиокружности $\varphi = 0$ (которая совпадает с обращенной дифракционной волной по принципу взаимности) и части начального положения фронта падающей волны $\zeta = 0$ ($\tau' = 0$). Тогда искомое решение задачи Коши (которое Адамар получил, используя формулу Грина) запишется в форме:

$$\eta'(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{c^2(M_0)} \left[\eta' \Big|_{t=0} \frac{\partial \eta'_{\Phi}}{\partial t} + \eta'_{\Phi} \frac{\partial \eta'}{\partial t} \Big|_{t=0} \right] dM_0 \quad (2.1)$$

где η'_{Φ} - фундаментальное решение сопряженного уравнения к волновому ([13], с.170, 178). Причем рассматривается конечная часть интеграла.

При этом, согласно теории Кирхгофа, следует интегрировать по освещенной части начальной волны, то есть полагать $x_1 \geq 0$ [2]. Для пояснения сути этого подхода обозначим через x_n и ξ_n , соответственно, точки пересечения фронта квазиокружности с начальной волной и экраном, причем $x_n > 0$, $\xi_n < 0$. Область интегрирования состоит из участков $(\xi_n, 0)$ и $(0, x_n)$. Когда $t = \tau$, то есть точка M находится на точечной волне, квазиокружность EF проходит через край O экрана и $\xi_n = 0$ (фиг. 1). Естественно считать, что при малых $t - \tau$ точка пересечения квазиокружности с экраном $x_1 = \xi_n - c_0(t - \tau)$. В то же время, как показано далее

$$x_n = s \pm \sqrt{s^2 + \frac{2c_0(t - \tau)}{K_1 - K_2}}$$

(s - расстояние от края экрана, K_1 и K_2 - кривизны, соответственно, начальной волны и квазиокружности) и для порядков можно получить:

$s^2 = c_0(t - \tau)$, $x_n \sim \sqrt{c_0(t - \tau)}$. Отсюда следует, что $\xi_n \ll x_n$ и при интегрировании в (2.1) частью области $x_1 < 0$ следует пренебречь. Более строгое обоснование выбора $x_1 > 0$ для области Σ проведено для модельной задачи определения давления и скоростей жидкости в окрестности точки касания дифракционной и падающей волн, где получено решение граничной задачи в виде интегралов по x_1 в пределах $(\xi_n, 0)$, $(0, x_n)$ [18], причем

$$\xi_n = -V \left(t - \frac{1}{C_0} \right) \sqrt{(x - \xi_n)^2 + y^2}, \quad x_n = V \left(t - \frac{1}{C_0} \right) \sqrt{(x - x_n)^2 + y^2}$$

где ось Ox выбрана по поверхности жидкости, а ось Oy - по нормали к ней (в глубь жидкости), а $V > c_0$ - скорость фронта давления на поверхности.

В рассматриваемом случае $\tau = r/c_0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Из выражений ξ_n и x_n можно получить

$$\xi_n = -\frac{V(t-\tau)}{1 + \frac{V}{c_0} \frac{x}{r}}, \quad x_n = V \frac{\frac{xV}{C_0^2} - t + \sqrt{\left(t - \frac{xV}{C_0^2}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{C_0^2} - 1\right)(t^2 - \tau^2)}}{\frac{V^2}{C_0^2} - 1}$$

Отсюда следует, что $\xi_n \approx t - \tau$, $x_n \approx \sqrt{t - \tau}$ и область $(\xi_n, 0)$ при интегрировании можно пренебречь.

Конечно, приведенная задача отличается от рассматриваемой задачи, но с точки зрения структуры решения, обе задачи эквивалентны. Таким образом, исходя из некоторых эвристических и более строгих соображений, показано, что при определении решения рассматриваемой задачи в окрестности касания волн следует интегралом по рассеивателю пренебречь, как малой более высокого порядка.

Для линейных уравнений (с постоянными или переменными коэффициентами) гиперболического типа с m независимым переменным элементарное решение, приведенное в [12, 13], при $m = 2m_1 + 1$ имеет вид: $v = \bar{V} / \Gamma^{m_1 - 1/2}$, где Γ - квадрат геодезического расстояния ($\Gamma = 0$ описывает характеристический коноид), а $\bar{V}$ - голоморфная функция координат двух точек. В рассматриваемом случае $m = 3$, следовательно, $m_1 = 1$ и $v = \bar{V} / \sqrt{\Gamma}$. В общем случае (для произвольных точек) Γ является решением дифференциального уравнения первого порядка с частными производными: $V(\partial\Gamma / \partial x_i, x_i) = 4\Gamma$, где $V = \sum b_{ik} \gamma_i \gamma_k$ - характеристическая форма линейного дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентами b_{ik} при старших производных. Если точки, между которыми измеряется геодезическое расстояние, бесконечно близки, то есть имеют координаты $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x + dx = (x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n)$,

то формула для Γ упрощается и имеет вид [17]: $\sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t - t_0)^2 + \tau^2}$, но опять остается неизвестным (хотя бы для уравнений с переменными коэффициентами) вид функции $\bar{V}$. Тогда, выражение элементарного решения для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами при старших производных, для практических приложений непригодно. Целесообразно его заимствовать из той же работы [17], которое в окрестности фронтов (дифракционной или распространяющейся) волн с использованием принципа взаимности можно записать в форме

$$\eta'_\phi = \sqrt{\frac{c(M_0)}{2|r'_\beta(M_0)|}} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} + \dots \quad (2.2)$$

где ... обозначены менее сингулярные слагаемые, $\vec{r}'$ - радиус-вектор $\vec{MM}_0$, $\beta = \text{const}$ характеризует бихарактеристики, то есть β есть угол составленной касательной к лучу в точке M с фиксированным направлением, $\bar{t}$ - время пробега от точки M_0 до точки M (или наоборот) вдоль проекции бихарактеристики на плоскость $\tau' = 0$ (фиг. 1).

Уместно отметить, что отличие методики нахождения решения изучаемой задачи от методики, изложенной в [17], состоит в расширении нестационарного одномерного решения по лучу на двумерную область.

До постановки фундаментального решения в (2.1) предварительно выразим в нем время пробега $t - \bar{t}$ от точки M до квазиокружности через φ , то есть $t - \bar{t} = \varphi / c(M_0)$.

После такой замены постановка элементарного решения (2.2) и начальных данных (1.8) в решении (2.1), с учетом, что y_1 от ζ отличается на величину второго порядка малости (размеры области интегрирования малы), дает

$$\eta'(M) = \frac{A}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \times \\ \times \iint \zeta^{\alpha-1} x_1^\gamma \left[\frac{\zeta}{c(M_0)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \right] \partial \zeta \partial x_1 \quad (2.3)$$

$c(M_0) = c(0) = c_0$, $|r'_\beta(M_0)| = |r'_\beta(0)| = |r'_{\beta 0}|$ вследствие их достаточно слабой изменяемости в области Σ . С целью сохранения, по мере возможности, точности решения замена $c(M_0)$ и $r'_\beta(M_0)$ на c_0 и $r'_{\beta 0}$ не произведена.

С целью вычисления интеграла разложим в окрестности точки O' величину $\varphi + \zeta$ в ряд Тейлора. Точка O' является точкой пересечения бихарактеристики, исходящей из точки M , где ищется решение с начальным фронтом волны, причем эта бихарактеристика является и лучом волны. Обозначим через x'_1, y'_1 координаты точки M_0 относительно новой декартовой системы координат с началом в O' и осью абсцисс касательной к кривой $\zeta = 0$ в этой точке. Тогда

$$(\varphi + \zeta)_{(x'_1, y'_1)} = (\varphi + \zeta)|_{O'} + \frac{\partial(\varphi + \zeta)}{\partial x'_1} \Big|_{O'} x'_1 + \frac{\partial(\varphi + \zeta)}{\partial y'_1} \Big|_{O'} y'_1 + \\ + \frac{\partial^2(\varphi + \zeta)}{\partial x'^2_1} \Big|_{O'} x'^2_1 + \frac{\partial^2(\varphi + \zeta)}{\partial y'^2_1} \Big|_{O'} y'^2_1 + \dots$$

где точками обозначены слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

С точностью величин второго порядка малости получим

$$(\varphi + \zeta)_{(0)} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial(\varphi + \zeta)}{\partial x_1'} \right|_{0'} \equiv 0, \quad \left. \frac{\partial(\varphi + \zeta)}{\partial y_1'} \right|_{0'} \equiv 1, \quad \left. \frac{\partial^2(\varphi + \zeta)}{\partial x_1'^2} \right|_{0'} = \\ = -K_1 + K_2 \quad y_1' = c(M_0)\tau''$$

где τ'' - время пробега от квазиокружности до начальной волны, равное времени пробега от дифракционной волны до фронта распространяющейся волны $t = t_\Phi$ вдоль бихарактеристики, то есть оно равно $t - t_\Phi$; $K_1 = -\partial^2\varphi/\partial x_1'^2$ - кривизна квазиокружности, $K_2 = \partial^2\zeta/\partial x_1'^2$ - кривизна фронта начальной волны, причем кривизна считается положительной, если вогнутость кривой находится с той стороны, куда распространяется волна. Следует отметить, что t_Φ - тот момент времени, когда фронт распространяющейся волны находится в точке $M(t_\Phi, x, y)$.

Таким образом,

$$\varphi + \zeta \equiv c(M_0)(t - t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s^2) \quad (2.4)$$

причем в работе рассматривается случай $K_1 - K_2 > 0$. Подставляя выражение φ из (2.4) в (2.3) и произведя с первым слагаемым интегрирование по частям, с учетом, что $\partial\varphi/\partial t = c(M_0)\partial\varphi/\partial\zeta$, получим

$$\eta(M) = \frac{\alpha A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \iint_{\substack{\zeta \geq 0 \\ x_1 \geq 0}} \frac{\zeta^{\alpha-1} x_1^\gamma d\zeta dx_1}{\sqrt{c(M_0)(t - t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 - \zeta}} \quad (2.5)$$

3. Вычисление интеграла (2.5). При вычислении интеграла (2.5) необходимо учесть следующих два возможных случая:

а) точка $M(t, x, y)$, расположенная вблизи предельного дифракционного луча, лежит за фронтом дифракционной волны $t > \tau$;

б) точка $M(t, x, y)$ лежит между фронтами дифракционной и распространяющейся волны, $t < \tau$.

Отметим, что в обоих случаях $t > t_\Phi$, что физически очевидно.

Пределы интегрирования по x_1 будут: абсциссы точек пересечения обращенного фронта дифракционной волны и начального фронта распространяющейся волны, определяющие из совместного решения уравнений $\varphi = 0$ и $\zeta = 0$. Тогда, как следует из (2.4), искомые значения x_1 являются корнями квадратного уравнения

$$c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 = 0$$

$$\left(x_{III,2} = s \pm \sqrt{2 \frac{c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} \right) \quad (3.1)$$

Но из известного соотношения $c_0(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)s^2 = c_0(t-\tau)$ следует, что в случае а) $x_{II} < 0$, а в случае б) $x_{II} > 0$. Согласно постановке задачи, рассматривается та часть области интегрирования, которая расположена правее кромки препятствия. Следовательно, в случае а) пределы интегрирования по направлению x_1 будут: 0, x_{III} , а в случае б) x_{II} , x_{III} .

В случае а), который рассмотрим сначала, двойной интеграл, представляя в форме повторного интеграла, решения (2.5) можно переписать в следующей форме:

$$\eta'(M) = \frac{A\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \int_0^{x_{II}} x_1^\gamma dx_1 \int_0^{\varphi=0} \frac{\zeta^{\alpha-1} d\zeta}{\sqrt{c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 - \zeta}}$$

Произведем замену переменного $\zeta = \psi \left[c_0(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 \right]$.

При $\varphi = 0$, $\zeta = c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2$ и $\psi = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi=0} \left[c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 - \zeta \right]^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\alpha-1} d\zeta = \\ & = \left[c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 \right]^{\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-\psi)^{-\frac{1}{2}} \psi^{\alpha-1} d\psi = \\ & = \left[c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 \right]^{\alpha-\frac{1}{2}} B\left(\alpha, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

[19], ФП, 774(1), с.339).

Значит

$$\eta' = \frac{A\alpha}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \int_0^{\varphi=0} \left[c(M_0)(t-t_\Phi) - \frac{1}{2}(K_1 - K_2)(x_1 - s)^2 \right]^{\alpha-\frac{1}{2}} x_1^\gamma dx_1$$

Введем вместо x_1 новую переменную ξ по формуле

$$x_1 = s + \sqrt{\frac{2c_0(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} \xi.$$

Тогда

$$\eta'(M) = \frac{A}{\pi} \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \frac{[c(M_0)]^\alpha}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \frac{(t-t_\Phi)^\alpha}{\sqrt{K_1 - K_2}} \int_{\xi_0}^1 (1-\xi^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[s + \sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} \xi \right]^\gamma d\xi$$

где ξ_0 определяется из равенства

$$\xi_0 \sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} + s = 0 \quad (3.2)$$

С целью вычисления последнего интеграла произведем новую замену переменного: $1-\xi^2 = (1-\xi_0^2)p$. Тогда

$$1-\xi^2 = 2(1-\xi_0)(1-qp)p, \quad q = \frac{1-\xi_0}{2}$$

$$s + \sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} \xi = \sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_\Phi)}{K_1 - K_2}} (\xi - \xi_0),$$

$$\xi - \xi_0 = (1-\xi_0)(1-p)$$

при $\xi = 1$ $p = 0$, а при $\xi = \xi_0$ $p = 1$, $d\xi = -(1-\xi_0)dp$.

Таким образом,

$$\eta' = 2^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \frac{[c(M_0)]^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \frac{(t-t_\Phi)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}}{(K_1 - K_2)^{\frac{1+\gamma}{2}}} (1-\xi_0)^{\alpha+\gamma+\frac{1}{2}} \times \\ \times \int_0^1 p^{\alpha-\frac{1}{2}} (1-p)^\gamma (1-qp)^{\alpha-\frac{1}{2}} dp$$

Интеграл, входящий в правую часть последнего равенства, представляет из себя табличный интеграл и выражается через бэта- и гипергеометрическую функции ([19] см. фр.: 7.211, с.416 и [20] 1531, с.373). Окончательно искомое решение в рассматриваемом случае запишется в форме:

$$\eta'(t, x, y) = 2^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\frac{3}{2}\right)} \frac{[c(M_0)(t-t_\phi)]^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|(K_1-K_2)^{1+\gamma}}} (1-\xi_0)^{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}+\alpha, \gamma+\alpha+\frac{3}{2}, \frac{1-\xi_0}{2}\right) \text{ при } t > \tau \quad (3.3)$$

В частном случае скачкообразной начальной волны $\alpha = \gamma = 0$ и из

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!!; \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{\arcsin z}{z}$$

([19], фр.: 7.221.26, с.417 и [20] 151.6, с.370) следует, что

$$\eta'(t, x, y) = \frac{2A}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(K_1-K_2)|r'_\beta(M_0)|}} \arcsin \sqrt{\frac{1-\xi_0}{2}}$$

Но $2 \arcsin \sqrt{\frac{1-\xi_0}{2}} = \arcsin \sqrt{1-\xi_0^2}$ и первую часть последнего равенства, с использованием тождества $\arcsin x = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ можно представить в форме:

$$\eta'(t, x, y) = \frac{A}{\pi} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|(K_1-K_2)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{\xi_0}$$

Но из выражения (3.2) и соотношения $s = -(\vartheta - \vartheta_0)(K_1 - K_2)$ следует, что

$$1-\xi_0^2 = \frac{t-\tau}{t-t_\phi}, \quad \xi_0 = -\sqrt{\frac{\tau-t_\phi}{t-t_\phi}}, \quad \text{а } \sqrt{\tau-t_\phi} = -\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2c(M_0)(K_1-K_2)}$$

и, следовательно,

$$\eta'(t, x, y) = \frac{A}{\pi} \frac{1}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|(K_1-K_2)}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2c(M_0)(t-\tau)(K_1-K_2)}}{\vartheta - \vartheta_0} \quad (3.4)$$

В случае б), опять представляя двойной интеграл (2.5) в форме повторного интеграла с использованием уже вышепродоланной замены переменных, вычислений и выражения пределов интегрирования (3.1), можно показать, что

$$\eta'(M) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{M_0}^\alpha}{\sqrt{|r'_\beta(M_0)|}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{(t-t_\phi)^\alpha}{\sqrt{K_1-K_2}} \int_{-1}^1 (1-\xi^2) \left[s + \frac{\sqrt{2c(M_0)(t-t_\phi)}}{K_1-K_2} \xi \right]^\gamma d\xi$$

Но согласно (3.2) и с учетом, что

$$1-\xi=2p', \quad 1-\xi^2=4p(1+p'), \quad \xi-\xi_0=(1-\xi_0)\left(1-\frac{2}{1-\xi_0}p'\right),$$

$$s+\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_0)}{K_1-K_2}}\xi=\sqrt{\frac{2c(M_0)(t-t_0)}{K_1-K_2}}(\xi-\xi_0),$$

искомое решение запишется в форме:

$$\eta'(t, x, y) = 2^{\frac{2\alpha+\gamma}{2}} \frac{Ac_{M_0}^{\frac{\alpha+\gamma}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{(t-t_0)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}(1-\xi_0)^\gamma}{\sqrt{|r'_\beta|_{M_0}}(K_1-K_2)^{\gamma+1}} \times \\ \times F\left(-\gamma, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+1, \frac{2}{1-\xi_0}\right)$$

Используя известное соотношение для гипергеометрических и гамма-функций:

$$F\left(-\gamma, \alpha+\frac{1}{2}, 2\alpha+1, x\right) = \left(1-\frac{x}{2}\right)^\gamma F\left(-\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}, 1+\alpha, y\right)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^z \Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad \text{где} \quad y = \left[\frac{x}{2-x}\right]^2$$

с учетом, что в рассматриваемом случае $x = \frac{2}{1-\xi_0}$, $z = \frac{1}{2} + \alpha$ искомое решение окончательно запишется в форме:

$$\eta'(t, x, y) = 2^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} Ac_{M_0}^{\frac{\alpha+\gamma}{2}} \frac{(t-t_0)^{\alpha+\frac{\gamma}{2}}(1-\xi_0)^\gamma}{\sqrt{|r'_\beta|_{M_0}}(K_1-K_2)^{\gamma+1}} F\left(-\frac{\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}, 1+\alpha, \frac{1}{\xi_0^2}\right) \quad (3.5)$$

В случае, когда точка M лежит левее предельного дифракционного луча ОР, решение задачи получается соответственно из (3.3) и (3.5) аналитическим их продолжением в эту область.

В частном случае $\gamma=0$ из (3.5) получается решение одномерной по лучу нестационарной задачи Коши (распространение волны в безграничной покоящейся неоднородной среде), приведенное в [17]. (Различие между ними состоит в разнице постоянных множителей, которая является следствием различия этих же постоянных, фигурирующих в начальных данных ([17], с.242).

4. Решение стационарной задачи дифракции. Пусть последовательность поверхностных гравитационных волн скачкообразного профиля и малой амплитуды, генерируемых на покоящейся поверхности моря или океана разными источниками, набегают на тонкий полубесконечный жесткий волно-

рез с заостренным концом. Задача состоит в нахождении амплитуды и фазы колебаний частиц в возмущенной области, расположенной за барьером. С этой целью применимо к найденному решению (3.4) преобразование Лапласа по времени. Тогда

$$U = u_1 + iu_2 = \frac{A}{\pi} \left[r'_\beta(M_0) | (K_1 - K_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \arctg a \sqrt{t - \tau} e^{-\sigma t} dt$$

где $a = \sqrt{2c(M_0)(K_1 - K_2)} / (\vartheta - \vartheta_0)$, σ - комплексная величина, причем $\text{Re}(\sigma^2) > 0$. Произведя интегрирование по частям (интегрированная часть равна нулю) и замену переменного $\sqrt{t - \tau} = T$ в полученном интеграле, можно показать, что

$$U = \frac{A}{\pi} \left[r'_\beta(M_0) | (K_1 - K_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{a}{\sigma} e^{-\sigma \tau} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma T^2} dT}{1 + a^2 T^2}$$

Но последний интеграл является табличным интегралом ([19] ст.169, ф.3.274) и выражается через функцию вероятностей, то есть

$$U = \frac{A}{2} \left[r'_\beta(M_0) | (K_1 - K_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\sigma \tau}}{\sigma} e^{\sigma \frac{(\vartheta - \vartheta_0)^2}{2c(M_0)(K_1 - K_2)}} \times$$

$$\times \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\sigma} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\sqrt{2c(M_0)(K_1 - K_2)}} \right) \right] \quad (4.1)$$

Чтобы полученному решению стационарной задачи дифракции, происходящей от края экрана, придать больше наглядности и привычности, выразим функцию вероятностей через функции Френеля. С этой целью в качестве σ возьмем чисто мнимую величину, то есть $\sigma = -i\sigma_2$ (которое удовлетворяет условию $\text{Re}\sigma^2 > 0$) и с учетом, что $\sqrt{-i} = \exp(-i\pi/4)$, произведем в интеграле вероятностей замену переменного $t = \exp(-i\pi/4)x$, где x - действительная величина. Тогда $e^{-i^2} = \cos x^2 - i \sin x^2$ и, следовательно,

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{a}\right) = \left[C\left(\frac{\sqrt{\sigma_2}}{a}\right) - S\left(\frac{\sqrt{\sigma_2}}{a}\right) \right] - i \left[C\left(\frac{\sqrt{\sigma_2}}{a}\right) + S\left(\frac{\sqrt{\sigma_2}}{a}\right) \right]$$

где C и S - интегралы Френеля. Таким образом, из (4.1) и последней формулы следует, что

$$U = u_1 + i u_2 = \frac{A}{2\sigma_2} \left[|r'_\beta(M_0)| (K_1 - K_2) \right]^{-1/2} e^{-i\sigma_2 \tau} e^{\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma(M_0)(K_1 - K_2)} \sigma_2} \times \quad (4)$$

$$\times \left\{ \left[C(\sqrt{\sigma_2}/a) + S(\sqrt{\sigma_2}/a) \right] - i \left[1 - C(\sqrt{\sigma_2}/a) + S(\sqrt{\sigma_2}/a) \right] \right\}$$

Благодарим В.М.Бабица за ценные замечания, которые авторы, по возможности, учли в статье.

Л и т е р а т у р а

1. Цыдипов Ч.Ц. Распространение ультракоротких радиоволн. - Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1977, 202 с.
2. Виноградов М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. - М.: Наука, 1979, 381 с.
3. Ле Блон П., Лайсек Л. Волны в океанах. Часть I. - М.: Мир, 1981, 478 с.
4. Багдоев А.Г., Безиргенян Г.С. О дифракции интенсивной световой волны в неоднородной, кубически-нелинейной среде. - Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 29, №1, с. 29-34.
5. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. - М.: ИЛ, 1959, 617 с.
6. Петрашень Г.И. и др. О методе рядов в теории дифракции волн на плоских угловых областях. - Л.: Уч. записки ЛГУ, 1958, т. 6, № 246, с. 5 - 7.
7. Селезнев И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. - Киев: Наукова Думка, 1989, 203 с.
8. Фок В.Л. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. - М.: Сов. радио, 1970, 517 с.
9. Леонтович М.Л., Фок В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения. - ЖЭТФ, 1946, 16, №17, с. 557 - 573.
10. Бабиц В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задаче дифракции. - Л.: ЛГУ 1974, 124 с.
11. Бабиц В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. - М.: Наука, 1972, 456 с.
12. Hadamard J. Commentarii Mathematici Helvetici - Paris, 1933, vol. 1, p. 137 - 173.
13. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука, 1978, 352 с.
14. Багдоев А.Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм.ССР, 1971, т. 24, № 1, с. 16-37.
15. Васильев Е.П. и др. Численные методы в теории дифракции. - В сб. Теория дифракции и распространения волн. Тр. VI Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. Цахкадзор, 1973, с. 7-15.
16. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть I. - М.: 1963.

17. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики. - Уч. записки ЛГУ. Динамические задачи теории упругости. ЛГУ, 1958, VI, № 246, вып. 32, с. 228-259.

18. Багдоев А.Г. Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн.- Изв.АН Арм.ССР,Механика,1969, т.22, N5, с.45-64.

19. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1951, 463 с.

20. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979, 830 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
3.10.1991