

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ
И УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКОГО ФУНДАМЕНТА, ЛЕЖАЩЕГО НА
УПРУГОМ ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

Абрамян Б.Л., Гаспарян А.В.

Բ. Լ. Աբրահամյան, Ա. Վ. Գասպարյան

Համասեռ առաձգական կիսավարածության վրա ամրակցումով զննվող
կոշտ կշռելի ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանումների
ամպլիտուդների որոշման մի եղանակի մասին

Դիտարկվում են առաձգական կիսավարածության մակերևույթի վրա ամրակցված
կշռելի կլոր հիմքով կոշտ ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանվող տատա-
նումները: Խնդրի լուծումը կառուցվում է մի սկայյար եւ մի վեկտորային պոտենցիալ ֆունկ-
ցիաների օգնությամբ: Ֆունդամենտի եւ առաձգական կիսավարածության միջև կոնտակ-
տային յարամների որոշումը բերվում է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումնե-
րի համակարգի լուծմանը: Կոշտ ֆունդամենտի հորիզոնական եւ անկյունային տատանում-
ների ամպլիտուդների որոշման համար արտածվում են մաթեմատիկական բանաձևեր: Դի-
նամիկ խնդրի համար ստացված լուծումից մասնավոր դեպքում ստացվում է համապատաս-
խան ստատիկ խնդրի լուծումը:

B.L.Abrahamian, A.V.Gasparyan

On the One Method of Amplitudes Definition of Horizontal and Rocking Vibrations
of Solid Heavy Footing Lying on the Elastic Homogeneous Half-Space with Cohesion

Рассматриваются горизонтальные и угловые гармонические колебания сцепленного с упругим
полупространством круглого в плане жесткого весомого фундамента.

Решение задачи строится при помощи одной скалярной и одной векторной потенциальных
функций. Определение контактных напряжений фундамента с упругим полупространством сводится
к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода. Выводятся аналитические
выражения для определения амплитуд горизонтальных и угловых колебаний фундамента.

В частном случае из полученного решения динамической задачи получается решение
соответствующей статической задачи.

Горизонтальные и угловые колебания жесткого круглого фундамента рассматривались также в
работах [1-5].

1. Постановка задачи. Под действием горизонтальной гармонической на-
грузки вида $Qe^{i\omega t}$, приложенной на верхней поверхности круглого жесткого
фундамента, сцепленного с упругим однородным основанием-полупростран-

ством, и направленной параллельно оси Ox , фундамент совершает колебательные движения.

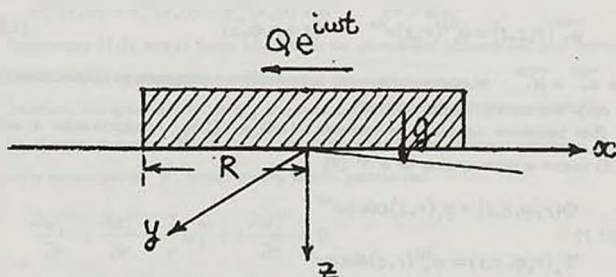
Граничные условия на поверхности упругого полупространства можно представить в виде (фиг. 1)

$$\begin{aligned} u_x|_{z=0} &= -\gamma_{\omega} e^{i\omega t} \\ u_x|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} - \varepsilon &= \chi_{\omega} x e^{i\omega t} \quad (x^2 + y^2 < R^2) \\ \sigma_z|_{z=0} = \tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} &= 0 \quad (x^2 + y^2 > R^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ε - осадка центральной точки нижней подошвы фундамента под действием собственного веса P фундамента; γ_{ω} - амплитуда горизонтальных колебаний фундамента, вызванных действием гармонической касательной силы $Qe^{i\omega t}$; χ_{ω} - амплитуда угловых колебаний фундамента вокруг оси Oy .

Осадка центральной точки подошвы фундамента под действием собственного веса фундамента считается известной из решения соответствующей статической задачи о действии жесткого круглого фундамента с плоским основанием вдавливаемого в упругое однородное полупространство с учетом сцепления.



Фиг. 1

Эта задача рассматривалась многими авторами и в работах В.И. Моссаковского [6,7] для осадки ε дается значение

$$\varepsilon = \frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{2ER \ln(3-4\nu)} \quad (1.3)$$

где P - вес фундамента, E - модуль упругости материала упругого основания фундамента, R - радиус фундамента, а V - коэффициент Пуассона основания.

Переходя из условий (1.1) и (1.2) к цилиндрической системе координат, для граничных условий будем иметь

$$\begin{aligned} u_r|_{z=0} &= -\gamma_\omega \cos \varphi e^{i\omega t} \\ u_\varphi|_{z=0} &= \gamma_\omega \sin \varphi e^{i\omega t} \quad (r < R) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} - \varepsilon &= \chi_\omega r \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \sigma_z|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{z\varphi}|_{z=0} &= 0 \quad (r > R) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Представляем искомые перемещения в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, z, t) - \bar{u}_r^{(0)}(r, z) &= \bar{u}_r^{(1)}(r, z, t) \cos \varphi \\ u_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \bar{u}_\varphi^{(1)}(r, z, t) \sin \varphi \\ u_z(r, \varphi, z, t) - \bar{u}_z^{(0)}(r, z) &= \bar{u}_z^{(1)}(r, z, t) \cos \varphi \\ \bar{u}_s^{(1)}(r, z, t) &= u_s^{(1)}(r, z) e^{i\omega t} \quad (s = r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\bar{u}_r^{(0)}$ и $\bar{u}_z^{(0)}$ - осесимметричные перемещения упругого полупространства от действия весомого фундамента.

Для решения задачи с условиями (1.4) и (1.5) представляем в виде (1.6) также и потенциалы Φ и $\bar{\Psi}$ [8]

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi, z, t) &= \varphi_1(r, z) \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_z(r, \varphi, z, t) &= \psi_z^{(1)}(r, z) \sin \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} [\psi_1^{(1)}(r, z) - \psi_2^{(1)}(r, z)] \cos \varphi e^{i\omega t} \\ \Psi_r(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} [\psi_1^{(1)}(r, z) + \psi_2^{(1)}(r, z)] \sin \varphi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.7)$$

После произведения преобразования по времени, волновые уравнения для потенциалов и граничные условия, с учетом нулевых начальных условий, приводятся к виду

$$(\nabla_1^2 + a^2 \omega^2) \varphi_1 = (\nabla_1^2 + b^2 \omega^2) \psi_z^{(1)} = 0$$

$$(\nabla_0^2 + b^2 \omega^2) \psi_1^{(1)} = (\nabla_2^2 + b^2 \omega^2) \psi_2^{(1)} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla_m^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad b^2 = \frac{1}{c_2^2}, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

где c_1, c_2 - соответственно, скорости распространения продольной и поперечной волн.

А граничные условия (1.4) и (1.5) приводятся к виду

$$u_r^{(1)}(r, 0) + u_\varphi^{(1)}(r, 0) = 0$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_\varphi^{(1)}(r, 0) = -2\gamma_\omega \quad (r \leq R) \quad (1.9)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = \chi_\omega r$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, 0) = \tau_z^{(1)}(r, 0) = \tau_{z\varphi}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (r > R)$$

Уравнения (1.8) могут быть получены из основных уравнений для потенциалов Φ и $\bar{\Psi}$, приведенных в [8].

Отметим, что функции ψ_1 и ψ_2 впервые были использованы в работе [9].

На основе условия $\text{div } \bar{\Psi} = 0$, существующего между компонентами векторного потенциала $\bar{\Psi}$, будет иметь место равенство

$$\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \psi_2^{(1)} + 2 \frac{\partial \psi_z^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

Перемещения $u_r^{(1)}$, $u_\varphi^{(1)}$ и $u_z^{(1)}$ представляются при помощи потенциалов следующими выражениями:

$$u_r^{(1)}(r, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \psi_z^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right)$$

$$u_\varphi^{(1)}(r, z) = -\frac{\varphi_1}{r} - \frac{\partial \psi_z^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial z} \right) \quad (1.11)$$

$$u_z^{(1)}(r, z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \psi_2^{(1)} \right)$$

На основе представлений (1.6) и (1.11) в аналогичном виде представляются также и компоненты напряжений $\sigma_z^{(1)}$, $\tau_{rz}^{(1)}$ и $\tau_{\theta\theta}^{(1)}$.

При абсолютно жестком фундаменте и выбранной координатной системе, согласно (1.4), (1.5) и (1.9) для касательных напряжений под фундаментом допускается равенство

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = -\tau_{\theta\theta}^{(1)}(r, 0) \quad (1.12)$$

Для определения введенных неизвестных амплитуд γ_ω и χ_ω должны быть использованы динамические условия равновесия фундамента, которые записываем в виде [2,4]

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \tau_{rz} \Big|_{z=0} d\Omega &= Q e^{i\omega t} - \frac{P\omega^2 \gamma_\omega e^{i\omega t}}{g} \\ \iint_{\Omega} \tau_{\theta\theta} \Big|_{z=0} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\iint_{\Omega} r \sigma_z \Big|_{z=0} d\Omega = M e^{i\omega t} - \frac{16P\omega^2 R^2 \chi_\omega e^{i\omega t}}{9\pi^2 g}$$

где Ω - область контакта фундамента с упругим полупространством; Q - амплитуда динамической силы, приложенной на фундаменте в горизонтальном направлении; P - вес фундамента; g - ускорение на поверхности Земли; M - амплитуда момента, вызывающего угловые колебания фундамента вокруг оси Oy , если центр тяжести фундамента находится на высоте h от контактной поверхности фундамента с упругим полупространством, то $M = hQ$.

В (1.13) учтены инерционные силы, появляющиеся из-за веса фундамента.

Введением обозначений $\sigma_z^{(1)}(r, 0) = G\sigma_z^{(1)}(r, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = G\tau_{rz}^{(1)}(r, \omega)$, условия (1.13) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_0^R r \tau_{rz}^{(1)}(r, \omega) dr &= \frac{Q}{2\pi G} - \frac{P\omega^2 \gamma_\omega}{2\pi G g} \\ \int_0^R r^2 \sigma_z^{(1)}(r, \omega) dr &= \frac{M}{\pi G} - \frac{16P\omega^2 R^2 \chi_\omega}{9\pi^3 G g} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где второе условие из (1.13) удовлетворяется тождественно.

2. **Определение контактных напряжений.** Для решения задачи с граничными условиями (1.9) и условиями (1.14) функции $\varphi_1(r, z)$ и $\psi_s^{(1)}(r, z)$ ($s=z, 1, 2$) ищем в виде интегралов Ханкеля

$$\varphi_1(r, z) = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \bar{\varphi}_1(\beta, z) d\beta, \quad \psi_z^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_1(\beta r) \bar{\psi}_z^{(1)}(\beta, z) d\beta$$

$$\psi_1^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \bar{\psi}_1^{(1)}(\beta, z) d\beta, \quad \psi_2^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \beta J_2(\beta r) \bar{\psi}_2^{(1)}(\beta, z) d\beta \quad (2.1)$$

Здесь путь интегрирования проходит вдоль вещественной оси плоскости β . $\bar{\varphi}_1(\beta, z)$ и $\bar{\psi}_s^{(1)}(\beta, z)$ - функции, подлежащие определению при помощи граничных условий (1.9), выражений (1.11) и подобных же выражений для напряжений.

Используя представления (2.1) в уравнениях (1.8), для определения функций $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\psi}_s^{(1)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial z^2} - \mu_a^2 \bar{\varphi}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(1)}}{\partial z^2} - \mu_b^2 \bar{\psi}_s^{(1)} = 0 \quad (s = z, 1, 2) \quad (2.2)$$

где введены обозначения

$$\mu_a = (\beta^2 - a^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_b = (\beta^2 - b^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

При составлении решений для уравнений (2.2), которые получены использованием зависимости от времени множителем вида $\exp(+i\omega t)$, вдоль пути

интегрирования функции $\left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c_{1,2}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ берутся неотрицательными вещественными частями, то есть по пути интегрирования вдоль действительной оси в

плоскости β обход точек $-\frac{\omega}{c_{1,2}}$ производится снизу, а точек $+\frac{\omega}{c_{1,2}}$ - сверху.

Тогда экспоненциальные выражения $e^{-\mu_a z}$ и $e^{-\mu_b z}$ при $z \neq 0$ будут соответствовать уходящим волнам [10]. Исходя из этого, поскольку мы рассматриваем упругое полупространство $z \geq 0$, ограниченные при $z \rightarrow \infty$ решения (а также и единственные) уравнений (2.2) следует взять в виде

$$\bar{\varphi}_1(\beta, z, \omega) = B^{(1)}(\beta, \omega) e^{-\mu_a z}, \quad \bar{\psi}_s^{(1)}(\beta, z, \omega) = B_s^{(1)}(\beta, \omega) e^{-\mu_b z} \quad (s = z, 1, 2) \quad (2.4)$$

Используя далее представления (1.11), (2.1) и (2.4) на поверхности упругого полупространства, будем иметь значения

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) d\beta \left\{ 2\mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta [B_1^{(1)}(\beta, \omega) + B_2^{(1)}(\beta, \omega)] \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{u}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta \quad (2.5)$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) + u_\varphi^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) d\beta [\beta B_z^{(1)}(\beta, \omega) - \beta B^{(1)}(\beta, \omega) - \\ - \mu_* B_2^{(1)}(\beta, \omega)] = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) [\bar{u}_r^{(1)}(\beta, 0, \omega) + \bar{u}_\varphi^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.6)$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_\varphi^{(1)}(r, 0) = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) d\beta [\beta B_z^{(1)}(\beta, \omega) + \beta B^{(1)}(\beta, \omega) + \\ + \mu_* B_1^{(1)}(\beta, \omega)] = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{u}_r^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{u}_\varphi^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.7)$$

$$\frac{\sigma_z^{(1)}(r, 0)}{G} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) d\beta \left\{ (2\beta^2 - b^2 \omega^2) B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta \mu_* [B_1^{(1)}(\beta, \omega) + B_2^{(1)}(\beta, \omega)] \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{\sigma}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta \quad (2.8)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) + \tau_{\varphi\theta}^{(1)}(r, 0)}{G} = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) d\beta \left\{ \mu_*^2 B_z^{(1)}(b, \omega) + 2\beta \mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta^2 B_1^{(1)}(\beta, \omega) \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_2(\beta r) [\bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\beta, 0, \omega) + \bar{\tau}_{\varphi\theta}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.9)$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(1)}(r, 0) - \tau_{\varphi\theta}^{(1)}(r, 0)}{G} = -\int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) d\beta \left\{ \mu_*^2 B_1^{(1)}(\beta, \omega) + 2\beta \mu_* B^{(1)}(\beta, \omega) + \right. \\ \left. + \beta^2 B_2^{(1)}(\beta, \omega) \right\} = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{\tau}_{\varphi\theta}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta \quad (2.10)$$

Учитывая граничные условия (1.9) и выражения (2.5) - (2.10), решение задачи приводим к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода следующего вида:

$$\int_0^{\infty} t \tau_{\alpha}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_1(\beta, \omega) J_0(\beta t) J_1(\beta r) d\beta -$$

$$(0 < r < R) \quad (2.11)$$

$$- \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_2(\beta, \omega) J_1(\beta t) J_1(\beta r) d\beta = \chi_{\omega} r$$

$$\int_0^R t \tau_{\alpha}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_3(\beta, \omega) J_0(\beta t) J_0(\beta r) d\beta -$$

$$(0 < r < R) \quad (2.12)$$

$$- \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} L_1(\beta, \omega) J_1(\beta t) J_0(\beta r) d\beta = 2\gamma_{\omega}$$

Здесь использованы также следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} \beta J_1(\beta r) \bar{\sigma}_z^{(1)}(\beta, 0, \omega) d\beta &= \begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \\ \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) [\bar{\tau}_{\alpha}^{(1)}(\beta, 0, \omega) - \bar{\tau}_{\alpha\alpha}^{(1)}(\beta, 0, \omega)] d\beta &= \begin{cases} 2\tau_{\alpha}^{(1)}(r, \omega) & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$D(\beta, \omega) = 4\beta^2 \mu_a \mu_b - (2\beta^2 - b^2 \omega^2)^2$$

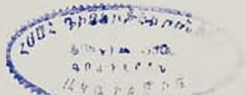
$$\beta^2 (2\mu_a \mu_b + b^2 \omega^2 - 2\beta^2) = D(\beta, \omega) L_1(\beta, \omega)$$

$$\mu_a \beta b^2 \omega^2 = D(\beta, \omega) L_2(\beta, \omega)$$

$$\beta [D(\beta, \omega) + \mu_a^2 b^2 \omega^2] = \mu_b D(\beta, \omega) L_2(\beta, \omega) \quad (2.14)$$

Интегрируемость подобных систем интегральных уравнений первого рода, полученных при решении динамических контактных задач теории упругости с учетом сцепления штампов с упругим основанием, в том числе плоских, осесимметричных и других динамических задач, исследовалась в работах В.А.Бабешко [11-13 и в др.].

В данной работе не является целесообразным провести дополнительные исследования об интегрируемости полученной системы (2.11) и (2.12). Здесь только приводится некоторое преобразование этой системы, которое делается для того, чтобы облегчить получение аналитических формул, выражающих амплитудные значения смещений точек под фундаментом и



угла наклона фундамента на поверхности упругого полупространства в зависимости от геометрических и физических параметров фундамента и его упругого основания и других факторов, влияющих на колебания фундамента.

Уравнения (2.11) и (2.12), для определения безразмерных величин $\sigma_z^{(1)}(r, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(r, \omega)$, связанных с контактными напряжениями на поверхности упругого полупространства под фундаментом, записываем в виде

$$\int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta = \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) \quad (0 < r < R) \quad (2.15)$$

$$\int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta = \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) \quad (0 < r < R) \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) = & \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{L_2(\beta, \omega)}{1 - \nu} \right] J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \\ & + \int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \frac{L_1(\beta, \omega)}{1 - \nu} J_1(\beta r) J_0(\beta t) d\beta - \frac{\chi_\omega r}{1 - \nu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) = & \int_0^R t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{L_3(\beta, \omega)}{2 - \nu} \right] J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta + \\ & + \int_0^R t \sigma_z^{(1)}(t, \omega) dt \int_0^{\infty} \frac{L_1(\beta, \omega)}{2 - \nu} J_0(\beta r) J_1(\beta t) d\beta + \frac{2\gamma_\omega}{2 - \nu} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя здесь представления

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_1(\beta r) J_1(\beta t) d\beta &= \frac{2}{\pi r t} \int_0^{\min(r, t)} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}} \\ \int_0^{\infty} J_0(\beta r) J_0(\beta t) d\beta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(r, t)} \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(t^2 - x^2)}} \end{aligned}$$

уравнения (2.15) и (2.16) можем представить в виде

$$\int_0^r \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \int_0^R \frac{\sigma_z^{(1)}(t, \omega)}{\sqrt{(t^2 - x^2)}} dt = \frac{\pi r}{2} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega)$$

$$\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \int_0^R \frac{t \tau_{rz}^{(1)}(t, \omega)}{\sqrt{(t^2 - x^2)}} dt = \frac{\pi}{2} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega)$$

Далее, применив формулы обращения Абеля из этих уравнений, получим

$$\sigma_z^{(1)}(t, \omega) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^2 dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \Phi_1(r, \chi_\omega, \omega) \quad (0 < t < R) \quad (2.19)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r dr}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \Phi_2(r, \gamma_\omega, \omega) \quad (0 < t < R) \quad (2.20)$$

Учитывая обозначения (2.17) и (2.18), из уравнений (2.19) и (2.20), для определения безразмерных величин $\sigma_z^{(1)}(t, \omega)$ и $\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega)$, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\sigma_z^{(1)}(t, \omega) = f_1(r, \chi_\omega, \omega) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, \omega) K_{11}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz}^{(1)}(z, \omega) K_{12}(t, z, \omega) dz \quad (0 < t < R) \quad (2.21)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(t, \omega) = f_2(r, \gamma_\omega, \omega) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, \omega) K_{21}(t, z, \omega) dz + \int_0^R \tau_{rz}^{(1)}(z, \omega) K_{22}(t, z, \omega) dz \quad (0 < t < R) \quad (2.22)$$

Здесь введены обозначения

$$f_1(t, \chi_\omega, \omega) = -\frac{4\chi_\omega t}{\pi(1-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}, \quad (2.23)$$

$$f_2(t, \gamma_\omega, \omega) = \frac{4\gamma_\omega}{\pi(2-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$K_{11}(t, z, \omega) = \frac{2z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^x [1 - \nu - L_2(\beta, \omega)] J_1(\beta x) \sin(\beta x) d\beta \quad (2.24)$$

$$K_{12}(t, z, \omega) = \frac{2z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_t^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^x L_1(\beta, \omega) J_0(\beta x) \sin(\beta x) d\beta$$

$$K_{21}(t, z, \omega) = -\frac{2z}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) J_1(\beta z) \cos(\beta x) d\beta \quad (2.25)$$

$$K_{22}(t, z, \omega) = -\frac{2z}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^R \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - t^2}} \int_0^\infty [2-\nu - L_3(\beta, \omega)] J_0(\beta z) \cos(\beta x) d\beta$$

3. Определение амплитуд колебаний фундамента

Подставив значения правых частей (2.19) и (2.20), или (2.21) и (2.22) в условия динамического равновесия фундамента (1.14), и произведя интегрирования, для определения амплитуд колебаний фундамента получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \gamma_\omega \left[1 - \frac{P(2-\nu)\omega^2}{8GRg} \right] &= \frac{Q(2-\nu)}{8GR} - \\ &- \frac{1}{2R} \int_0^R z \sigma_z^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) \frac{J_1(\beta z) \sin(\beta R)}{\beta} d\beta - \\ &- \frac{1}{2R} \int_0^R z \tau_\pi^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty [2-\nu - L_3(\beta, \omega)] \frac{J_0(\beta z) \sin(\beta R)}{\beta} d\beta \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \chi_\omega \left[1 - \frac{2P(1-\nu)\omega^2}{3\pi^2 GRg} \right] &= -\frac{3Q(1-\nu)h}{8GR^3} - \\ &- \frac{3}{2R^3} \int_0^R z \sigma_z^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty [1-\nu - L_2(\beta, \omega)] J_1(\beta z) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta} \right) d\beta - \\ &- \frac{3}{2R^3} \int_0^R z \tau_\pi^{(1)}(z, \omega) dz \int_0^\infty L_1(\beta, \omega) J_0(\beta z) \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\sin(\beta R)}{\beta} \right) d\beta \end{aligned} \quad (3.2)$$

При помощи этих выражений можно сделать выводы о характере зависимости величин амплитуд колебаний фундамента от геометрических и физических параметров фундамента и упругого полупространства, на котором лежит фундамент со сцеплением.

4. Решение статической задачи о действии сдвига жесткого фундамента касательной силой, когда фундамент лежит на упругом полупространстве со сцеплением

Из решения динамической задачи о колебаниях жесткого фундамента, лежащего на упругом полупространстве со сцеплением, произведя предельный переход в соотношениях (2.21) - (2.25), (3.1) и (3.2) при $\omega \rightarrow 0$,

можно получить решение соответствующей статической задачи и формулы для определения величин горизонтального сдвига фундамента на поверхности упругого полупространства под действием горизонтальной сосредоточенной силы, и угла наклона фундамента, а также систему интегральных уравнений, для определения контактных напряжений под фундаментом.

Произведя предельный переход при $\omega \rightarrow 0$, из (2.21) и (2.22) получим

$$\sigma_z^{(1)}(t, 0) = f_1(t, \chi_0, 0) + \int_0^R \tau_{rc}^{(1)}(z, 0) K_{12}(t, z, 0) dz$$

$$\tau_{rc}^{(1)}(t, 0) = f_2(t, \gamma_0, 0) + \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, 0) K_{21}(t, z, 0) dz \quad (0 < t < R) \quad (4.1)$$

где

$$f_1(t, \chi_0, 0) = -\frac{4\chi_0 t}{\pi(1-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}, \quad f_2(t, \gamma_0, 0) = \frac{4\gamma_0}{\pi(2-\nu)\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$K_{12}(t, z, 0) = \frac{(1-2\nu)z}{\pi(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_{\max(t, z)}^R \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)(x^2 - z^2)}}$$

$$K_{21}(t, z, 0) = -\frac{1-2\nu}{\pi(2-\nu)} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 - t^2}} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_{\max(t, z)}^R \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - t^2)(x^2 - z^2)}} \right] \quad (4.2)$$

Аналогичным образом, из формул (3.1) и (3.2), получим

$$\gamma_0 = \frac{(2-\nu)Q}{8GR} + \frac{1-2\nu}{4R} \int_0^R \sigma_z^{(1)}(z, 0) (R - \sqrt{R^2 - z^2}) dz \quad (4.3)$$

и

$$\chi_0 = -\frac{3(1-\nu)hQ}{8GR^3} - \frac{3(1-2\nu)}{4R^3} \int_0^R z \sqrt{R^2 - z^2} \tau_{rc}^{(1)}(z, 0) dz \quad (4.4)$$

где γ_0 и χ_0 - соответственно, горизонтальный сдвиг фундамента и угол его наклона на поверхности упругого полупространства.

Подобные формулы (4.1) - (4.4) были получены другим путем в работе [14].

Л и т е р а т у р а

1. Назаров А.Г. О взаимодействии между фундаментом и сооружением при землетрясении. - Тр.Тбилисского геофизического института, 1939, т.4, с.35-63.
2. Gladwell G.M.L. Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid. - Intern. Journ. of Engin. Sciences. 1968, vol.6, No.10, 591-607.
3. Luco J.E., Westmann R.A. Dinamic Response of circular Footing. - Journ. of Engineering mechanics division (Proceed. of ASCE), 1971, vol.97, octob., 1381-1395.
4. Луко, Вестманн. Динамика жесткого фундамента, соединенного с упругим полупространством - Прикл.механика (Тр.американского общества инженеров, механиков, сер.Е), 1972, т.39, № 2, с.211- 219.
5. Beredugo Y.O. and Novak M. Coupled horizontal and rocking vibrations of embedded footings. - Canadian Geotechnical Journal, 1972, vol.9, 477-497.
6. Моссаковский В.И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий . - ПММ, 1954, т.18, вып.2, 187-196.
7. Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С. Контактные задачи математической теории упругости. - Киев: Наукова думка, 1985. 175 с.
8. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. - North-Holland publ. Co., Amsterdam - New York - Oxford. 4-th printing, 1984. 425 p.
9. Chi-Chang Chao. Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface Loadings. - Journ. of Appl. Mechanics (Trans. ASME, ser.E), 1960, vol.27, №.3, 559-567.
10. Нобль Б. Применение метода Винера-Хопфа. - М.: Изд. Иностр. литер., 1962. 279 с.
11. Бабешко В.А. О системах интегральных уравнений динамических контактных задач. - ДАН СССР, 1975, т.220, №.6, 1293-1296.
12. Бабешко В.А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением. - ПММ, 1975, т.39, вып.3, 505-512.
13. Бабешко В.А., Румянцев А.Н. Вибрация штампа, частично сцепленного с упругой средой. - ПММ, 1978, т.42, вып.6, 1085-1092.
14. Abramian B.L. Certain asymmetrical contact problems for semi-space. The mechanics of the contact between deformable bodies. Proceed. of the IUTAM Symposium 20-23 August 1974, Enschede, Netherlands. 1975, Delft Univ. Press, Ed-s A.D. de Pater and J.J.Kalker, p. 84-98.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
22.10.1992