ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 47, № 3-4, 1994 Механика

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИОНННЫЕ ЗАДАЧИ ЖЕСТКОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ СЛОЕВ СО СЛУЧАЙНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

БЕЛУБЕКЯН М.Э., ГНУНИ В.Ц.

Բելուբեկյան Մ.Է., Գնունի Վ.Ց.

Պատահական առաձգական բնութագրեր ունեցող շերտերից պատրաստված բազմաշերտ սալի կոշտության, տատանումների և կայունության օպտիմիզացման խնդիրներ

Դիտարկվում են օպտիմիզացման խնդիրներ, երբ սալի շերտերը պատրաստված են այնպիսի իզոտրոպ նյութերից, որոնց առաձգական բնութագրերը նորմալ օրենքով բաշխված մեծություններ են: Պահպանելով սալի կշիռը հաստատուն, որոշվում են դրա այնպիսի օպտիմալ կառուցվածքները, որոնց դեպքում մեծագույն հավանականությամբ կապահովվեն սալի կոշտությունը, կայունությունը և տատանումների տրված առաջին հաճախությունը:

Belubekian M.E., Gnuni V.Z.

Optimization Problems on Stiffness, Vibrations and Stability of a Multi-Layer Plate Made of Layers With Random Elastic Characteristics

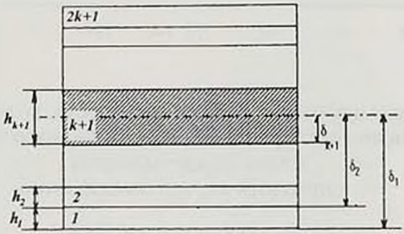
В работе рассматриваются оптимизационные задачи жесткости, колебаний и устойчивости многослойной прямоугольной пластинки в случае, когда слои пластинки изготовлены из изотропных материалов, характеристики упругости которых являются случайными величинами с нормальными законами распределения. При постоянном весе пластинки определяются ее оптимальные структуры, при которых с наибольшей вероятностью будут обеспечены жесткость, устойчивость и заданная низшая частота собственных колебаний пластинки.

1. Рассматривается $(2k+1)$-слойная пластинка симметричной структуры размерами $a \times b \times h$, шарнирно опертая по контуру и загруженная поперечной равномерно распределенной нагрузкой $q_0 = const$ (фиг.1). Считается, что слои пластинки изготовлены из изотропных материалов с нормально распределенными характеристиками упругости. Ставится задача определения структуры пластинки (относительно толщин слоев), при которой с наибольшей вероятностью максимальный прогиб пластинки постоянного веса не будет превышать заданную величину.

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки представляется в виде [1]:

$$D\Delta^2 W = q_0 \tag{1}$$

где $W(x,y)$ - функция прогибов пластинки.



Фиг. 1

Жесткость на изгиб многослойной симметричной пластинки вычисляется по формуле

$$D = \frac{2}{3}\left[B_{k+1}\delta_{k+1}^3 + \sum_{i=1}^{k} B_i\left(\delta_i^3 - \delta_{i+1}^3\right)\right]$$

где $B_i = \dfrac{E}{1-\nu_i^2}$ - характеристика упругости i-го слоя, δ_i - расстояние от срединной поверхности до i-го слоя, которое можно выразить через толщины слоев пластинки:

$$\delta_i = \sum_{l=i}^{k} h_l + \frac{h_{k+1}}{2} \qquad (i = 1,2,\ldots,k)$$

$$\delta_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{2}$$

где h_i - толщина i-го слоя пластинки.

Принимается масса пластинки заданной и равной массе однослойной пластинки толщины h изготовленной из материала $(k+1)$-го слоя:

$$\rho_{k+1}h_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k}\rho_i h_i = \rho_{k+1}h$$

где ρ_i- плотность материала i-го слоя.

Введением безразмерных величин характеристик упругости и жесткости пластинки:

$$\overline{B}_i = \frac{B_i}{B_{k+1}^0}, \qquad \overline{D} = \frac{3D}{2h^3 B_{k+1}^0} \tag{2}$$

где B_{k+1}^{0} - среднее значение B_{k+1} для безразмерной жесткости получится следующая формула:

$$\overline{D}=\sum_{i=1}^{k-1}\overline{B}_i\left[\left(\sum_{l=i}^{k}\alpha_l\right)^3-\left(\sum_{l=i+1}^{k}\alpha_l\right)^3\right]+\overline{B}_k\left[\alpha_k^3-\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^3\right]+$$

$$+\overline{B}_{k+1}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^3$$

где $\alpha_i=\frac{h_i}{h}$.

Зная законы распределения входящих в это выражение величин $\overline{B}_i$, можно определить также закон распределения жесткости $\overline{D}$. Предполагается, что случайные величины $\overline{B}_i$ подчиняются нормальным законам распределения вероятностей со стандартами $\overline{S}_i$ и модами $\overline{m}_i$, причем $\overline{S}_i$ является среднеквадратическим отклонением, а $\overline{m}_i$ - математическим ожиданием случайной величины $\overline{B}_i$, то есть плот-ость распределения вероятностей $\overline{B}_i$ имеет вид [2]:

$$f_i\left(\overline{B}_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\overline{S}_i}e^{-\frac{\left(\overline{B}_i-\overline{m}_i\right)^2}{2\overline{S}_i^2}}\qquad\left(i=1,2\ldots,k\right)$$

Поскольку $\overline{D}$ является суммой случайных величин $\overline{B}_i$ с соответствующими коэффициентами, то ее закон распределения также нормальный:

$$f\left(\overline{D}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\overline{S}}e^{-\frac{\left(\overline{D}-\overline{m}\right)^2}{2\overline{S}^2}}$$

Безразмерное математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\overline{D}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{m}=\sum_{i=1}^{k-1}\left[\left(\sum_{l=i}^{k}\alpha_l\right)^3-\left(\sum_{l=i+1}^{k}\alpha_l\right)^3\right]+\left[\alpha_k^3-\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^3\right]+$$

$$+\overline{m}_{k+1}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^3$$

$$\overline{S}=\left[\sum_{i=1}^{k-1}\overline{S}_i^2\left[\left(\sum_{l=i}^{k}\alpha_l\right)^3-\left(\sum_{l=i+1}^{k}\alpha_l\right)^3\right]^2+\overline{S}_k^2\left[\alpha_k^3-\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^3\right]^2+\right.$$

$$\left.+\overline{S}_{k+1}^2\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{\rho_{k+1}}\alpha_i\right)^6\right]^{\frac{1}{2}}$$

Прогибы пластинки определяются из уравнения (1) с удовлетворением граничных условий опирания по контуру [3]

$$W(x,y)=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

Максималный прогиб $\left(x=\frac{a}{2};\ y=\frac{b}{2}\right)$ равен

$$\overline{W}_{max}=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn\left(m^2+n^2\lambda^2\right)^2}$$

где $\lambda=\frac{a}{b}$.

Подстановкой сюда значения D из формулы (2) и переходом к безразмерным величинам получается

$$\overline{W}_{max}=\frac{\pi^6 h^3 B_{k+1}^0}{24q_0a^4}\frac{1}{\sum\limits_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\sum\limits_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}+1}}{mn\left(m^2+n^2\lambda^2\right)^2}}\cdot W_{max}=\frac{1}{\overline{D}} \qquad (3)$$

Поставленная задача сводится к нахождению такой структуры пластинки (значений $\alpha_i, i=1,2,\dots,k$) при которой с наибольшей вероятностью W_{max} не будет превышать заранеее заданной значение γ, то есть нужно найти:

$$Q_W=\sup_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\left[P(W\le\gamma)\right],$$

что ввиду (3) равносильно

$$Q_W=\sup_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\left(1-\int_0^{\frac{1}{\gamma}}f(\overline{D})\,d\overline{D}\right) \qquad \alpha_i\in[0;1] \qquad (4)$$

2. Для рассматриваемой задачи пластинки ставится задача нахождения оптимальной структуры, при которой с наибольшей вероятностью значение низшей частоты собственных колебаний будет больше заданной величины.

Уравнение собственных колебаний пластинки имеет вид [1]:

$$D\Delta^2 W + \rho_{k+1} h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

где t - время.

Решение задачи с учетом формулы (2) для жесткости пластинки приводит к следующему значению квадрата первой частоты собственных колебаний:

$$\omega_{11}^2 = \frac{2h^2 B_{k+1}^0}{3\rho_{k+1}} \cdot \frac{\pi^4}{a^4}\left(1+\lambda^2\right)^2 \overline{D}$$

После введения безразмерного значения квадрата частоты собственных колебаний

$$\overline{\omega}^2 = \frac{3\rho_{k+1} a^4}{2h^2 B_{k+1}^0 \pi^4 \left(1+\lambda^2\right)^2} \omega^2$$

получается $\overline{\omega}_{11}^2 = \overline{D}$.

Поставленная задача сводится к определению такой структуры пластинки (значений $\alpha_i, i = 1,2,\dots,k$), при которой с наибольшей вероятностью значение $\overline{\omega_{11}}$ будет больше заданного β , то есть ищется

$$Q_\omega = \sup_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\left(1 - \int_0^{\beta^2} f\left(\overline{D}\right) d\overline{D}\right) \qquad \alpha_i \in [0;1] \tag{5}$$

3. Рассматривается случай многослойной симметричной пластинки, когда к ее граням перпендикулярно оси x приложена равномерно распределенная нагрузка P. Ставится задача определения структуры пластинки постоянного веса, при которой критическая нагрузка с наибольшей вероятностью будет больше заданной величины.

Дифференциальное уравнение устойчивости пластинки имеет вид [2]:

$$D\Delta^2 W + P\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

После решения этого уравнения с учетом условия граничного опирания пластинки по контуру получается следующее выражение для критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2}\left(m^2 + \frac{\lambda^4}{m^2} + 2\lambda^2\right)$$

С учетом формулы (2) для жесткости пластинки и обезразмериванием величины P_{KP} получается:

$$\overline{P}_{KP} = \frac{3a^2}{2\pi^2 h^3 B^0_{k+1}} \frac{1}{\left(m^2 + \frac{\lambda^4}{m^2} + 2\lambda^2\right)} P_{KP} = \overline{D}$$

Поставленная задача сводится к нахождению такой структуры пластинки (значений α_i, $i = 1,2,\ldots,k$), при которой $\overline{P}_{KP}$ с наибольшей вероятностью будет больше заранее заданного значения ϑ, то есть надо найти:

$$Q_p = \sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\left(1-\int_0^{\vartheta} f\left(\overline{D}\right)d\overline{D}\right) \qquad \alpha_i \in [0;1] \tag{6}$$

4. Как видно, для решения всех трех задач наобходимо вычисление интегральной функции распределения случайной величины $\overline{D}$:

$$F\left(\overline{D}\right) = \int f\left(\overline{D}\right)d\overline{D}$$

В качестве примера решения этих задач рассматривается трехслойная пластинка ($k = 1$), где толщина внешнего слоя равна $\frac{h_1}{2}$, толщина внутреннего слоя равна h_2, а $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0.62$. Числовые расчеты произведены для двух случаев распределения упругих характеристик. В первом случае принимается $\overline{m}_1 = 1.57$; $\overline{m}_2 = 1$; $\overline{S}_1^{\,2} = 0.31$; $\overline{S}_2^{\,2} = 0.011$. Во втором случае $\overline{m}_1 = 10$; $\overline{m}_2 = 1$; $\overline{S}_1^{\,2} = 1.1$; $\overline{S}_2^{\,2} = 0.031$.

Поскольку формулы (4), (5), (6) для вычисления наибольших вероятностей в каждой из рассматриваемых задач имеют одинаковый вид, то для упрощения числовых расчетов пределы интегрирования приняты одинаковыми $\left(\frac{1}{\gamma} = \beta^2 = \vartheta = A\right)$. Тогда

$$Q_W = Q_\omega = Q_p = Q = \sup_{\alpha}\left(1-\int_0^{A} f\left(\overline{D}\right)d\overline{D}\right)$$

где $\alpha = \frac{h_2}{h}$.

Таблица 1

$\overline{m}_1 = 1.57; \overline{m}_2 = 1; \overline{S}_1^{\,2} = 0.31; \overline{S}_2^{\,2} = 0.01$			$\overline{m}_1 = 10; \overline{m}_2 = 1; \overline{S}_1^{\,2} = 1.1; \overline{S}_2^{\,2} = 0.031$		
A	α	Q_0	*A*	α	Q_0
0.900	0.95	0.8488	3.4	0.55	0.8646
0.925	0.95	0.7755	3.5	0.55	0.7999
0.950	0.95	0.6856	3.6	0.55	0.7197
0.975	1.00	0.5941	3.7	0.55	0.6263
1.000	1.00	0.5000	3.8	0.55	0.5249
1.025	1.00	0.4059	3.9	0.55	0.4218
1.050	1.00	0.3169	4.0	0.55	0.3239
1.075	1.00	0.2375	4.1	0.55	0.2368
1.100	1.00	0.1704	4.2	0.55	0.1645
1.125	1.00	0.1169	4.3	0.55	0.1082

В табл.1 приведены оптимальные значения параметра α и соответствующие вероятности Q_0 в зависимости от величин *A*.

Как видно из полученнных результатов, при использовании материалов слоев со сравнительно близкими упругими характеристиками (первый случай) оптимальной получается пластинка, изготовленная из материала среднего слоя. При более резком различии упругих характеристик материалов слоев (второй случай) оптимальной является структура пластинки, когда $\alpha = 0.55$ $(h_2 = 0.55h,\ \ h_1 = 0.28h)$. То есть получается пластинка со сравнительно тонкими усиливающими наружными слоями $(\frac{h_1}{2} = 0.14h)$ из материала с высокими упругими характеристиками.

Литература

1. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. - М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Госфизматиздат, 1963. 635 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
10.03.1993