ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Механика 47, №1—2, 1994 Механика

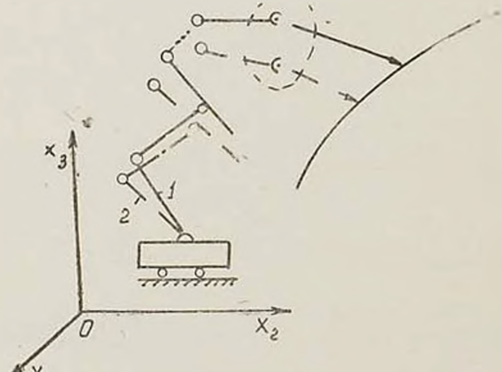
УДК 62.50

О ВЛИЯНИИ ВАРИАЦИЙ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

А. А. ГУКАСЯН

В работе исследуются вопросы определения моментов переключения для релейного типа управления манипуляционным роботом в случае изменения начальных условий. Подобные вопросы для различных механических систем исследованы в работах [1—8] и др.

1. *Исходные предположения.* Рассмотрим управляемое движение N звенного манипулятора фиг. 1. Обобщенные координаты манипулятора обозначим через вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^T$, где α_i—углы в шарнирах или линейное относительное движение звеньев. Положение схвата в пространстве определим вектором $x=(x_1, x_2, x_3)$ (схват моделируется как материальная точка).



1 - начальное состояние манипулятора
2 - начальное состояние после нескольких циклов работ

Фиг. 1.

Уравнение движения манипулятора определим в форме Лагранжа и представим в векторном виде

$$\ddot{\alpha}=f(\alpha,\dot{\alpha},M) \qquad (1.1)$$

где $M=(M_1,\ldots,M_n)$ — управляющие силы и моменты, развиваемые приводами, расположенными в шарнирах O_i.

Между обощенными координатами манипулятора α_i и координатами, определяющими положение схвата, имеется следующая связь:

$$x=\bar{f}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \qquad (1.2)$$

Пусть в пространстве переменных $x_i (i=1,2,3)$ задана некоторая линия, которую с учетом (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0 \\ &\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Функции $\varphi_i(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0$ в пространстве переменных α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ представляют собой гладкие гиперповерхности. Пересечение Ω этих гиперповерхностей является $(n-2)$-мерным гладким многообразием, если в каждой точке $\alpha\in\Omega$ векторы grad $\varphi_i(\alpha)$ $(i=1,2)$ линейно независимы [1].

Пусть требуется за время $t\in[t_0,T]$ из начального положения $x(t_0)=x^0$, $\dot{x}(t_0)=\dot{x}^0$ привести схват манипулятора на линию (1.3) со скоростью $\dot{x}(T)=a$ и с минимизацией некоторого функционала, характеризующего качество переходного процесса:

$$J=\int_{t_0}^{T}\Phi(\alpha,\dot{\alpha},M)\,dt\to\min_{|M(t)|\leqslant m} \qquad (1.4)$$

Введем фазовые переменные

$$\alpha_i=y_i,\quad \dot{\alpha}_i=y_{i+n}\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (1.5)$$

Начальное множество представляет собой $r_0=(2n-6)$- мерное гладкое многообразие S^0, а конечное $r_1=(2n-5)$-мерное гладкое многообразие S_1 в пространстве переменных $\{y_i, y_{i+n}\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Векторное уравнение (1.1) и функционал (1.4) в фазовом пространстве (1.5) представим в виде

$$\dot{y}=F(y,M),\quad y^0\in S^0 \qquad (1.6)$$

$$J=\int_{t_0}^{T}\Phi(y,M)\,dt\to\min_{|M(t)|\leqslant m} \qquad (1.7)$$

соответственно.

2. *Математическая формулировка и исследование задачи.* Пусть движение механической системы описывается векторным дифферен-

циальным уравнением (1.6). Требуется найти такие управляющие силы и моменты, которые приводят фазовую точку из начального положения на многообразие $S^1[y(T)]=0$ с минимизацией функционала (1.7).

Сформулированная задача является задачей оптимального управления с подвижными концами [1].

Предположим, что при применении принципа максимума Понтрягина [1], управление M, решающее поставленную задачу, имеет релейный вид:

$$M=m\,\mathrm{sign}[g(y)], \quad \sigma=g(y) \tag{2.1}$$

а сопряженным уравнением является

$$\dot{\psi}=h(y,\psi), \quad \sigma=g(y), \quad \psi(T)=0 \tag{2.2}$$

Пусть функция $\sigma=g(y)$ имеет k простых нулей. Это означает, что управляющее устройство при реализации оптимального управления манипулятором изменяет знак управления k раз.

Подставляя (2.1) в правую часть уравнения (1.6), получим

$$\dot{y}=F\{y, m\,\mathrm{sign}[g(y)]\} \tag{2.3}$$

Правая часть уравнения (2.3) имеет разрыв в момент переключения $\tau_i(i=1,2,\ldots,k)$. Разделим пространство состояний Y, где происходит движение, на $(k+2)$ подпространств $Y_0, Y_1, \ldots, Y_k, Y_{k+1}$ с гиперповерхностями $g_i(y)=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$, так что

$$y\in\begin{cases} Y_{i-1}, & \text{если } g_i(y)>0 \\ Y_i, & \text{если } g_i(y)=0 \\ Y_{i+1} & \text{если } g_i(y)<0 \quad (i=1,2,\ldots,k) \end{cases} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3), описывающее движение манипулятора, можно заменить системой дифференциальных уравнений следующего типа:

$$\begin{aligned} \dot{y}&=F_i(y) \quad \text{для } y\in\overline{Y}_{i-1} \\ \dot{y}&=F_{i+1}(y) \quad \text{для } y\in\overline{Y}_{i+1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь под $\overline{Y}_{i-1}(i=1,2,\ldots,k)$ понимается замыкание подпространства Y_{i-1}. Предположим, что правые части системы (2.5) удовлетворяют условиям единственности и непрерывности решений в $\overline{Y}_{i-1}$ и в $\overline{Y}_{i+1}(i=1,2,\ldots,k)$.

Пусть $y=y(t)$ является решением задачи оптимального управления, начинающимся в точке $y(t_0)\in Y_0$, пересекающим гиперповерхности $g_i(y)=0$ $(i=1,2,\ldots,k)$ в точках $y(\tau_i)$ и проходящим через некоторую точку $y_1\in Y_{k+1}$. Траектория $y=y(t)$ является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, именно, во всех точках, кроме $\tau_i(i=$ $=(1,2,\ldots,k)$.

В соответствии с оптимальным решением $y=y(t)$, которое характеризует оптимальное изменение конфигурации манипулятора в фазовом пространстве, можно из выражений (1.2) определить также оптимальный закон движения схвата манипулятора:

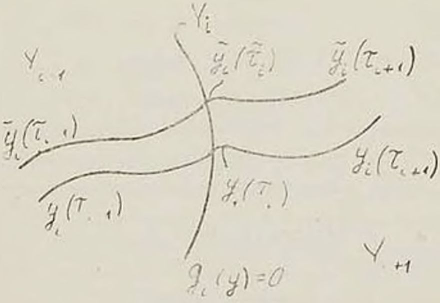
$$x = f(y_1(t),\dots,y_n(t)) \tag{2.6}$$

$$\dot{x} = F(x)_0 = \{\partial \bar{f}_i(y)/\partial y_j\}_{i,j=1}^{3,n}(y_{1+n}(t),\dots,y_{2n})^T$$

Фазовая траектория схвата также является непрерывной и кусочно-дифференцируемой

Во время работы манипулятора, в силу действия различных воздействий и помех, начальное (исходное) состояние манипулятора трудно восстановить (фиг. 1). Это приводит к тому, что если известна вариация начального условия $\delta y_0 = \bar{y}_0 - y_0$, то в случае релейного управления необходимо определить новые моменты переключения управлющей функции соответственно новому начальному условию

3. Определение моментов переключения. Не нарушая общности, рассмотрим поведение фазовой траектории движений манипулятора



Фиг. 2.

$y=y(t)$ на интервале времени $\tau_{i-1} \leq \tau_i < \tau_{i+1}$, где τ_i — момент переключения, а $y(\tau_i)$—точка переключения управляющей функции (фиг. 2). Предполагаем, что $y(\tau_{i-1}) \in Y_{i-1}$ является начальным условием и обозначим через $y_i^0 = y(\tau_{i-1})$, а траекторию на интервале времени $t \in [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$—через $y=y(t)$, где $\bar{y}_i^0 = y_i^0 + \varepsilon\delta y_i^0 + 0(\varepsilon)$ [7]

Пусть возмущенная фазовая траектория движения манипулятора $\bar{y}_i(t)$ пересекает гиперповерхность $g_i(y)=0$ в момент времени $\bar{\tau}_i$, т. е. $g[\bar{y}(\bar{\tau}_i)]=0$ и проходит через некоторую точку $\bar{y}(\tau_{i+1}) = \bar{y}^i \in Y_{i+1}$. Без потери общности будем рассматривать случай, когда $\tau_i \leq \bar{\tau}_i$ (случай $\bar{\tau}_i \geq \tau_i$ не вносит в анализе исследования принципиальных затруднений)

Траекторию системы, соответствующую новому начальному условию, представим в виде [7]

$$\bar{y}_i(t) = y_i(t) + \delta y_i(t), \text{ для } \tau_{i-1} \leq t < \tau_i \tag{3.1}$$

$$\tilde{y}_i(t)=y_i(t)+\delta y_i^+(t), \text{ для } \tilde{\tau}_i<t\leq\tau_{i+1}$$

где $\delta y_i^-(t)$, $\delta y_i^+(t)$—решения уравнений

$$\frac{d}{dt}[\delta y_i^-(y)]=\frac{\partial F_i}{\partial y}\bigg|_{y_i(t)}\cdot\delta y_i^-(t) \tag{3.2}$$

$$\delta y_i^-(\tau_{i-1})=\delta y_i^0$$

$$\frac{d}{dt}[\delta y_i^+(y)]=\frac{\partial F_i}{\partial y}\bigg|_{y_i(t)}\cdot\delta y^+(t) \tag{3.3}$$

Из (3.1)–(3.3) следует, что $\delta y_i^-(t)$ на интервале $t\in[\tau_{i-1},\tau]$ можно определить из (3.2), а для определения решения $\delta y_i^+(t)$ уравнения (3.3), необходимо найти соотношение между $\delta y^+(t)$ и $\delta y_i^-(t)$.

Момент переключения, соответствующий новому начальному условию, определим следующим образом

$$\tilde{\tau}_i=\tau_i+\varepsilon t_i \tag{3.4}$$

Тогда

$$\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)=y_i(\tau)+\varepsilon\delta y_i(\tau_i^-)+\varepsilon F_i[\tilde{y}_i(\tau_i)]\cdot\delta t_i+0(\varepsilon) \tag{3.5}$$

$$\delta y_i^+(\tilde{\tau}_i)=\delta y_i^-(\tau_i^-)+\{F_i[\tilde{y}_i(\tau_i)]-F_{i+1}[y_i(\tau_i)]\}\delta t_i+0(\varepsilon) \tag{3.6}$$

Так как гиперповерхность $g_i[y(t)]=0$ является поверхностью переключения, то это означает, что фазовые точки движения манипулятора $\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)$ и $y_i(t_i)$ одновременно принадлежат ему, то есть

$$g_i[y_i(\tilde{\tau}_i)]-g_i[y_i(\tau_i)]=0$$

или в первом приближении

$$g_i[y_i(\tilde{\tau}_i)]-g_i[y_i(\tau_i)]=\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)+0(\varepsilon)], \tag{3.7}$$

$$\tilde{y}_i(\tilde{\tau}_i)-y_i(\tau_i)\rangle=0$$

Подставляя (3.5) в соотношение (3.7) и перейдя к пределу, когда $\varepsilon\to0$, получим

$$\delta t_i=-\frac{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],\delta y_i^-(\tau_i^-)\rangle}{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],F_i[y_i(\tau_i^-)]\rangle} \tag{3.8}$$

$$\delta y_i^+(\tau_i^+)-\delta y_i^-(\tau_i^-)=\{F_{i+1}[y_i(\tau_i^+)]-F_i[y_i(\tau_i^-)]\}\times$$

$$\times\frac{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],\delta y_i^-(\tau_i^-)\rangle}{\langle g_{iy}[y_i(\tau_i)],F_i[y_i(\tau_i^-)]\rangle} \tag{3.9}$$

Разность между $\delta y_i^+(\tau_i^+)$ и $\delta y_i^-(\tau_i^-)$ называется условием скачка для возмущенного движения в точке переключения.

Из (3.9) следует, что между функциями $\delta y_i^+(\tau_i^+)$ и $\delta y_i^-(\tau_i^-)$ имеется линейная связь, то есть

$$\delta y_i^-(\tau_i)=A\delta y_i^+(\tau_i) \tag{3.10}$$

После того, как найдена связь (3.10), можно определить новую фазовую траекторию движения манипулятора из уравнений (3.2) и (3.3)

$$\delta y_i^-(t)=\Phi_1[t,\tau_{i-1}]\cdot\delta y_i^-(\tau_{i-1}), \quad \tau_{i-1}\leqslant t\leqslant\tau_i \tag{3.11}$$

$$\delta y_i^+(t)=\Phi_2[t,\tau_i]\cdot\delta y_i^+(\tau_i), \quad t\geqslant\tau_i \tag{3.12}$$

Здесь Φ_1 и Φ_2—фундаментальные матрицы решений уравнений (3.2) и (3.3), соответственно.

Из (3.10)—(3.12) следует, что

$$\delta y_i(t)=M(t,t_{i-1})\delta y_i(\tau_{i-1}) \tag{3.13}$$

где

$$M(t,\tau_{i-1})=\Phi_2[t,\tau_i][A]\Phi_1[t,\tau_{i-1}]$$

Если матрица M—неособая, то

$$\delta y_i(\tau_{i-1})=M^{-1}\delta y_i(t)$$

Заметим, что если заданы исходное решение $y_i(t)$ и вариации начального условия $\delta y_i(\tau_{i-1})$, то известны все члены в правой части выражения (3.8), определяющие влияние вариации начальных условий на момент переключения τ_i. Проведенное исследование можно распространить для любого i и тем самым, определить влияние вариации начальных условий на моменты переключения $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$.

В соответствии с (2.6) возмущенная траектория движения схвата манипулятора по первому приближению на интервале времени $t\in\in[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$, имеет вид

$$\delta x=F(y)\delta x=\{\partial f_i(y)/\partial y_j\}_{i,j}^{3,1}\cdot\delta y$$

ABOUT INFLUENCE OF INITIAL CONDITIONS VARIATIONS ON SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL OF MANIPULATING ROBOTS MOTION PROBLEM

A. A. GUKASIAN

ՄԱՆԻՊՈՒԼՅԱՑԻՈՆ ՌՈԲՈՏՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՎՐԱ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտված է մանիպուլյացիոն ռոբոտների օպտիմալ ղեկավարման անջատման կետերի որոշման հարցերը, սկզբնական պայմանների փոփոխության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1983, 392 с.
2. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями.—М.: Наука, 1980, 384 с.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления.—М.: Наука, 1987, 365 с.
4. *Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.* Игровые задачи управления и поиска.—М.: Наука, 1978, 270 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем.—М.: Наука, 1971, 424 с.
6. *Рогов Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление электродвигателем робота с упругими элементами.—Тех. кибернетика, 1989, № 1, с. 135—145.
7. *Леондес В. У.* Функции чувствительности относительно начальных условий и их применение.—Тр. американского общества инженеров-механиков «Теоретические основы инженерных расчетов», 1971, № 3, с. 128—134.
8. *Гукасян А. А.* О влиянии вариации начальных условий на решение задачи оптимального управления манипуляционных роботов.—Тезисы докл. 7-ой Всесоюзной конференции по управлению в механических системах. Свердловск, 1990, 32 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 20.11.1991