УДК 539.43

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДУЛЯЦИОННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЕ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Изучается вопрос распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве

На основании дисперсионного уравнения, найденного в асимптотическом приближении, получено уравнение модуляции и условия устойчивости распространения волн.

Изучается вопрос устойчивости распространения одномерной квазимонохроматической волны в нелинейно-упругой пластине, находящейся на вязкоупругом полупространстве. Случай упругого основания рассмотрен в [1].

1. Пусть нелинейно-упругая [2, 3] пластинка находится на вязкоупругом полупространстве и по пластине распространяется изгибная волна.

Одномерное уравнение движения пластинки будет [3]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z \quad (1.1)$$

где

$$D_1 = \frac{E h^3 \nu_1 \nu_2}{135(1-\nu^2)}, \quad \nu_1 = \frac{(1-\nu+\nu^2)^2}{(1-\nu)^2}, \quad \rho - \text{плотность пластинки, } Z - \text{влияние основания.}$$

Уравнениями движения основания будут

$$\bar{\mu} \Delta u + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{\mu} \Delta v + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где для вязкоупругих операторов имеем

$$\bar{\mu} u = \mu \left[u - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s) u(s) ds \right] \quad (1.3)$$

и аналогичное выражение для $\bar{\lambda}$, т. е. принимается, что коэффициент Пуассона постоянен.

На границе контакта пластинки с основанием принимается следующее условие:

$$v=w, \quad \sigma_y=Z, \quad \tau_{xy}=0 \quad \text{при } y=0 \quad (1.4)$$

Решение (1.1) и (1.2) ищется в виде

$$w=ae^{i\tau} + \bar{a}e^{-i\bar{\tau}}, \quad \tau=kx-\omega t$$

$$u=f(y)e^{i\tau} + \bar{f}(y)e^{-i\bar{\tau}}, \quad v=z(y)e^{i\tau} + \bar{z}(y)e^{-i\bar{\tau}} \quad (1.5)$$

где чертой обозначены комплексно-сопряженные значения.

Подставляя (1.5) в (1.2) и в выражениях f и $\bar{z}$ оставляя ограниченные части решения, имеем

$$u=(C_1 e^{-p_1 y} + C_2 e^{-p_2 y})e^{i\tau} + (\bar{C}_1 e^{-\bar{p}_1 y} + \bar{C}_2 e^{-\bar{p}_2 y})e^{-i\bar{\tau}} \quad (1.6)$$

$$v=(B_1 e^{-p_1 y} + B_2 e^{-p_2 y})e^{i\tau} + (\bar{B}_1 e^{-\bar{p}_1 y} + \bar{B}_2 e^{-\bar{p}_2 y})e^{-i\bar{\tau}}$$

$$p_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{(\lambda + 2\mu)(1 - \Gamma_c)}}, \quad p_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu(1 - \Gamma_c)}} \quad (1.7)$$

$$\bar{p}_1 = p_1(\omega \rightarrow \bar{\omega}, \Gamma_c \rightarrow \bar{\Gamma}_c), \quad \text{а } \Gamma_c = \int_0^{\bar{z}} e^{i\omega z} \Gamma(z) dz$$

Удовлетворяя условиям (1.4), получим

$$C_1 = a \frac{p_2 - ik\alpha_2}{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1}, \quad C_2 = a \frac{ik\alpha_1 - p_1}{\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1} \quad (1.8)$$

$$B_j = \alpha_j C_j$$

$$\alpha_j = \frac{l}{k p_j (\lambda + \mu)} \left[k^2 (\lambda + 2\mu) - \rho_j \right] - \frac{\rho_j \omega^2}{1 - \Gamma_c}$$

Вычисляя σ_y по формуле $\sigma_y = \tau e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$, имеем

$$\sigma_y|_{y=0} = (1 - \Gamma_c) [ik(C_1 + C_2) - (\lambda + 2\mu)(B_1 p_1 + B_2 p_2)] e^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c) [-ik(\bar{C}_1 + \bar{C}_2) - (\lambda + 2\mu)(\bar{B}_1 \bar{p}_1 + \bar{B}_2 \bar{p}_2)] e^{-i\bar{\tau}} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.5) и (1.9) с учетом (1.7), (1.8) в (1.1), получим нелинейное дисперсионное уравнение (трансцендентное для ω_0 , где ω_0 — линейная частота).

Ввиду большой сложности, полученное уравнение целесообразно исследовать его асимптотически. В частности, для малых ω^2/k^2 для σ_y получим

$$\sigma_y|_{y=0} = -\frac{2\mu(\lambda + \mu)k}{l + 2\mu} [(1 - \Gamma_c) a e^{i\tau} + (1 - \bar{\Gamma}_c) \bar{a} e^{-i\bar{\tau}}] \quad (1.10)$$

Дисперсионное уравнение в таком приближении будет

$$Dk^4 + 3D_1 k^3 |a|^2 + \alpha k [1 - \Gamma_c(\omega_0)] = \rho_0 \hbar \omega^3 \quad (1.11)$$

где

$$\alpha = 2\mu(i + \mu)/(\lambda + 2\mu)$$

В частности, если материал основания экспоненциального типа $\Gamma(z) = \gamma e^{-\alpha z}$, то для линейной частоты ω_0 будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 + i\omega_2 \\ \rho h \omega_1^2 &= Dk^4 + 2\rho h \omega_1^2 \beta + \sigma k \\ \omega_1 &= \frac{\alpha \gamma k}{2(Dk^4 + \alpha k + \rho h \beta^2)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

При получении (1.12) учитывается малость диссипации (ω_2).

2. Для получения уравнения модуляции представим (1.11) в виде

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial A^2} \right)_{A^2=0} A^2, \quad A = |a| \quad (2.1)$$

где ω_0 определяется по (1.12), а

$$\frac{\partial \omega}{\partial A^2} = D_2 - iD_3 \quad (2.2)$$

$$D_2 = \frac{3}{2} \frac{D_1 k^6}{\rho h \omega_1} e^{i\tau_0}, \quad D_3 = \frac{3D_1 k^6}{(2\rho h \omega_1)^2} \left[2\rho h \omega_1 + \frac{\alpha \gamma k (\omega_1^2 - \beta^2)}{(\beta^2 + \omega_1^2)^2} \right] e^{i\tau_0}$$

Следуя [4-6], модуляционное уравнение можно получить, заменяя в (2.1) $\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$, $k \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x}$ и применяя (2.1) к $A e^{i\tau_0}$ ($\tau_0 = kx - \omega_0 t$), при этом используется формула

$$\omega_0 \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) A e^{i\tau_0} = \left[\omega_0(k) A - i \omega_0'(k) \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{2} \omega_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right] e^{i\tau_0}$$

Тогда получится:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i(D_2 - iD_3) |A|^2 A = 0 \quad (2.3)$$

Здесь при вычислении ω_1 в (1.12), член с ω_2 можно отбросить.

В работе [7] модуляционное уравнение получено несколько иным путем. Вместе с тем, исследование на устойчивость нужно провести аналогично. Как и там, полагая

$$\begin{aligned} A &= b e^{i\tau} \\ b &= b_0(t) + b'(x, t), \quad \tau = \tau_0(t) + \varphi'(x, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Получим системы для невозмущенного и возмущенного движений. Далее, записав решение для возмущения в виде

$$b' = F \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad \varphi' = \Phi \exp[i(Kx - \Omega t)] \quad (2.5)$$

для Ω получим уравнение

$$z^2 + 3D_3 b_0^2 z + z_1(z_1 + 2D_3 b_0^2) = 0 \quad (2.6)$$

где

$$z = -i\Omega + iK \frac{d\omega_1}{dk} - \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 \quad (2.7)$$

$$z_1 = iK \frac{d\omega_2}{dk} + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2$$

Из (2.9) следует, что условием устойчивости будет

$$\Omega_2 \leq 0, \quad \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 \quad (2.8)$$

Анализ корней (2.6) показывает, что имеется устойчивость, тогда

$$\frac{3}{2} b_0^2 |D_2| + \frac{d\omega_2}{dk} \frac{K \left(D_2 b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_1}{dk^2} K^2 \right)}{\sqrt{z_2}} < \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2,$$

$$\text{если } z_2 = \left(\frac{1}{2} K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} \right)^2 + D_2 b_0^2 K^2 \frac{d^2\omega_1}{dk^2} - \left(\frac{3}{2} D_2 b_0^2 \right)^2 > 0 \quad (2.9)$$

2) Если же $z_2 < 0$, то

$$\frac{2}{3} |D_2| b_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega_2}{dk^2} K^2 > \sqrt{-z_2} \quad (2.10)$$

Полученные соотношения верны также и для Винклерова основания (вязкоупругого), т. е. тогда в (1.12) третий член должен быть заменен $\alpha'(1-\Gamma_c)$ (в (1.11) форма волнообразования учитывается) и в дальнейших формулах zk должно быть заменено на α' .

THE STABILITY MODULATION WAVE IN NONLINEAR PLATE ON THE VISCOELASTIC BASE

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԱՌԱՋԳԱՄԱՆՈՒՅԻԿ շԻՄՔԻ ՎՐԱ ՈՉ ԳՆԱՅԻՆ ՍԱՆՈՒՄ
ՄՈԳՈՒՎԱՑԻՈՆ ԱՆՔԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է ոչ դժային առաձգական սալում, որը գտնվում է առաձգամածուցիկ հիսատարածության վրա, միաշափ քվադրմոնոխորամատիկ ալիքի տարածման հարցը:

Դիսպերսիոն հալատարման հիման վրա, որը գտնվել է սահմայտորիկ մոտավորությամբ, ստացվել է մոդուլացիայի հավասարումը և ալիքի տարածման կայունության պայմանը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гопчян Д. Х.* Волны модуляций в пластинках на упругом основании—Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1982, с. 270—275.
2. *Кюндерер Г.* Нелинейная механика.—М.: ИЛ, 1961, 777 с.
3. *Багдоян А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.
4. *Каррлин В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах—М. Наука, 1973, 175 с.
5. *Багдоян А. Г.* Распространение волн в сплошных средах—Ереван Изд-во АН АрмССР, 1981, 306 с.
6. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн.—М. Наука, 1984, 432 с.
7. *Багдоян А. Г., Мовсисян Л. А.* К вопросу устойчивости распространения нелинейных волн в вязкоупругой пластине.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 2, с. 3—10.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.12.1992