ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 47, № 1—2, 1994 Механика

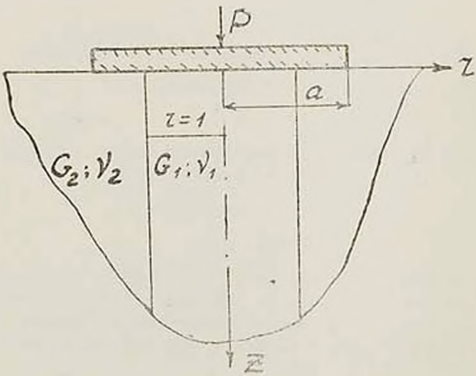
УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

ПАПОЯН С. О.

Исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен цилиндр из другого материала. На общей торцевой плоскости действует жесткий штамп. Решение задачи сведено к интегральному уравнению, затем—к квазивполне регулярной системе.

В работе исследуется осесимметричная контактная задача для упругого полупространства, имеющего цилиндрическую выемку, в которую вложен упругий цилиндр из другого материла. Контактные задачи для упругого полупространства с выемкой рассмотрены в работах [1—4]. Задача решается при помощи функции напряжений и сводится к интегральному уравнению, а затем—к квазивполне регулярной системе.



Фиг. 1.

Упругое полупространство имеет полубесконечную цилиндрическую выемку радиусом $r=1$, в которую вложен упругий полубесконечный цилиндр из другого материала с радиусом $r=1$. Цилиндр по боковой поверхности полностью сцеплен с полупространством (фиг. 1)

На граничной поверхности составного полупространства действует гладкий жесткий круглый штамп, радиус которого больше радиуса выемки $a>1$, то есть линия раздела материалов останется под штампом. На плоской граничной поверхности полупространства вне штампа заданы нормальные напряжения. Трение между штампом и полупространством отсутствует. Упругий цилиндр имеет механические постоянные G_1, ν_1, а полупространство с выемкой—G_2, ν_2.

Граничные условия и условия контакта имеют вид.

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=0 \qquad (0<r<1) \tag{1}$$

$$U_z^{(1)}(r,0)=c \qquad (0\leq r\leq 1) \tag{2}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,0)=0 \qquad (1<r<\infty) \tag{3}$$

$$U_z^{(2)}(r,0)=c \; (1\leq r\leq a) \quad \sigma_z^{(2)}(r,0)=\varphi(r) \; (a<r<\infty) \tag{4}$$

$$U_r^{(1)}(1,z)=U_r^{(2)}(1,z); \qquad U_z^{(1)}(1,z)=U_z^{(2)}(1,z)$$

$$(0<z<\infty) \tag{5}$$

$$\sigma_r^{(1)}(1,z)=\sigma_r^{(2)}(1,z), \quad \tau_{rz}^{(1)}(1,z)=\tau_{rz}^{(2)}(1,z)$$

Бигармоническую функцию напряжений для полубесконечного цилиндра удобно представить в виде [1]

$$\Phi_1(r,z)=E_0 z^3+$$

$$+\int_0^\infty [C_1(\mu)I_0(\mu r)+D_1(\mu)\cdot\mu r I_1(\mu r)]\sin\mu z\,d\mu \tag{6}$$

$$(0\leq r\leq 1); \quad (0\leq z<\infty)$$

а для полупространства с цилиндрической выемкой—в виде [2]

$$\Phi_2(r,z)=\int_0^\infty [A(\mu)+\mu z B(\mu)]e^{-\mu z}W_0(\mu r)\,d\mu+$$

$$+\int_0^\infty [C_2(\mu)K_0(\mu r)+D_2(\mu)\mu r K_1(\mu r)]\sin\mu z\,d\mu \tag{7}$$

$$(1\leq r<\infty); \quad (0\leq z<\infty)$$

где $W_n(\mu r)=J_n(\mu r)Y_1(\mu)-Y_n(\mu r)J_1(\mu)$, а $J_n(x)$; $Y_n(x)$, $I_n(x)$ и $K_n(x)$—функции Бесселя [5]

Пользуясь известными формулами [1], выражающими компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений, и удовлетворяя условиям (2) и (3), получим

$$E_0=G_1 c/1-2\nu_1; \quad A(\mu)=2\nu_2 B(\mu) \tag{8}$$

а условие (1) удовлетворяется тождественно.

Удовлетворяя контактным условиям (5), для определения неизвестных функций $C_i(\mu)$ и $D_i(\mu)$ ($i=1;\ 2$) получаем следующую систему из четырех уравнений:

$$
\begin{aligned}
&C_1(\beta)I_1(\beta)+D_1(\beta)\,\beta I_0(\beta)-G[C_2(\beta)K_1(\beta)+D_2(\beta)\cdot\beta K_0(\beta)]=0\\
&C_1(\beta)I_0(\beta)+D_1(\beta)[4(1-\nu_1)I_0(\beta)+\beta I_1(\beta)]-\\
&-G\{C_2(\beta)K_0(\beta)-D_2(\beta)[4(1-\nu_2)K_0(\beta)-\beta K_1(\beta)]\}=F_1(\beta)\\
&C_1(\beta)I_1(\beta)+D_1(\beta)[2(1-\nu_1)I_1(\beta)+\beta I_0(\beta)]+\\
&+C_2(\beta)K_1(\beta)-D_2(\beta)[2(1-\nu_2)K_1(\beta)-\beta K_0(\beta)]=0\\
&C_1(\beta)\left[I_0(\beta)-\frac{I_1(\beta)}{\beta}\right]+D_1(\beta)[(1-2\nu_1)I_0(\beta)+\beta I_1(\beta)]-\\
&-C_2(\beta)\left[K_0(\beta)+\frac{K_1(\beta)}{\beta}\right]+D_2(\beta)[(1-2\nu_2)K_0(\beta)-\beta K_1(\beta)]=F_2(\beta)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

здесь $F_i(\beta)$ ($i=1;\ 2$) определяются формулами:

$$F_1(\beta)=GF_2(\beta)-\frac{8G}{\pi^2\beta^2}\int_0^\infty\frac{\mu B^*(\mu)d\mu}{\mu^2+\beta^2},\tag{10}$$

$$F_2(\beta)=\frac{8}{\pi^2\beta}\int_0^\infty\frac{\mu B^*(\mu)d\mu}{(\mu^2+\beta^2)^2};\quad G=G_1/G_2;$$

а

$$B^*(\mu)=\mu^2B(\mu);\tag{11}$$

Таким образом, все неизвестные, входящие в (6) и (7), выражаются через $B^*(\mu)$ (11).

Удовлетворяя теперь смешанным условиям (4), имея в виду (8), для определения $B^*(\mu)$ получим следующие парные интегральные уравнения, содержащие функцию Вебера [2—3]:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty B^*(\mu)W_0(\mu r)d\mu=-\frac{G_2c}{1-\nu_2}\qquad(1\leqslant r\leqslant a)\\
&\int_0^\infty \mu B^*(\mu)W_0(\mu r)d\mu=\varphi(r)-M(r)\qquad(a<r<\infty)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{aligned}
M(r)=\int_0^\infty\beta^2\{C_2(\beta)K_0(\beta r)-D_2(\beta)[2(2-\nu_2)K_0(\beta r)-\\
-\beta rK_1(\beta r)]\}d\beta
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Дополним первое уравнение (12) на интервале ($r>a$) при помощи неизвестной функции $f(r)$:

$$\int_0^\infty B^*(\mu)W_0(\mu r)d\mu = \begin{cases} -\frac{Gc}{1-\nu_2} & (1\leq r\leq a) \\ -\frac{G}{1-\nu_2}f(r) & (a\leq r<\infty) \end{cases} \tag{14}$$

Отсюда при помощи формул интегрального преобразования Вебера-Орра для $B^*(\mu)$ получим

$$B^*(\mu) = -\frac{G_2}{1-\nu_2}\frac{caW_1(\mu a)}{\Delta(\mu)} - \frac{G_2}{1-\nu_2}\cdot\frac{\mu}{\Delta(\mu)}\int_a^\infty rf(r)W_0(\mu r)dr \tag{15}$$

где

$$\Delta(\mu) = Y_1^2(\mu)+J_1^2(\mu) \tag{16}$$

Подставляя $B^*(\mu)$ (15) во второе уравнение (12), имея в виду (8)—(11) и (13), после ряда преобразований для определения $S(t)$, связанной с $f(r)$ формулой

$$S(t)=t\int_a^t \frac{f'(r)dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{17}$$

получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода [2, 3, 4]:

$$S(x)+c=\Phi(x)+\int_a^\infty S(t)K(t,x)dt \quad (a<x<\infty) \tag{18}$$

Ядро и свободный член этого уравнения имеют вид

$$K(t,x)=\int_0^\infty\left\{\frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)}+\frac{1}{\mu K_1^2(\mu)\Delta_1(\mu)}\left[\omega_1(\mu x)\left(1-\mu t+\mu\frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2G(1-\nu_2)\omega_2(\mu x)\right]\right\}e^{-\mu(t+x)}d\mu \tag{19}$$

$$\Phi(x) = -\frac{1-\nu_2}{G_2}\int_x^\infty \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-x^2}}dr$$

В (19) введены обозначения:

$$\omega_1(\mu x)=\omega_0(\mu x)[E(\mu)-GN(\mu)]+2(1-\nu_1)2(1-\nu_2)\times$$
$$\times[\varkappa_1(\mu)-\varkappa_2(\mu)-1/\mu]G$$
$$\omega_2(\mu x)=\omega_0(\mu x)N(\mu)+2(1-\nu_1)[P(\mu)+(1-\mu x)Q(\mu)]$$
$$\omega_0(\mu x)=(1-G)[1-\mu x+\mu\varkappa_2(\mu)]-2(1-\nu_2)G$$
$$\Delta_1(\mu)=(1-G)^2\cdot N(\mu)\cdot L(\mu)+2(1-\nu_1)2(1-\nu_2)GQ^2(\mu)+$$

$$+2(1-\nu_1)(1-G)L(\mu)[2\varkappa_1(\mu)-1/\mu]+2(1-\nu_2)(1-G)GN(\mu)\times$$

$$\times[2\varkappa_2(\mu)+1/\mu]; \tag{20}$$

$$\varkappa_1(\mu)=\frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)};\quad \varkappa_2(\mu)=\frac{K_0(\mu)}{K_1(\mu)};\quad \varkappa_3(\mu)=\mu[1-\varkappa_1(\mu)\cdot\varkappa_2(\mu)],$$

$$N(\mu)=\mu[1-\varkappa_2^2(\mu)]+\frac{2(1-\nu_1)}{\mu};\quad P(\mu)=\varkappa_3(\mu)+\frac{2(1-\nu_1)}{\mu},$$

$$L(\mu)=\mu[1-\varkappa_1^2(\mu)]+\frac{2(1-\nu_2)}{\mu};\quad Q(\mu)=\varkappa_1(\mu)+\varkappa_2(\mu);$$

$$E(\mu)=\mu[1-\varkappa_1^2(\mu)]+4(1-\nu_1)\varkappa_1(\mu);$$

При получении уравнения (18) были использованы следующие формулы [4,6]:

$$\int\limits_x^\infty \frac{rW_0(\mu r)}{\sqrt{r^2-x^2}}dr=\frac{\cos\mu x Y_1(\mu)-\sin\mu x J_1(\mu)}{\mu};$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mu[\cos\beta x Y_1(\beta)-\sin\beta x J_1(\beta)]}{\Delta(\beta)(\mu^2+\beta^2)}d\beta=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{e^{-\mu x}}{K_1(\mu)}; \tag{21}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{T(\mu x)T(\mu t)}{\Delta(\mu)}d\mu=\frac{\pi}{2}[\delta(t-x)+\delta(t+x)]-$$

$$-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty\frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)}e^{-\mu(t+x)}d\mu;$$

где

$$T(\mu x)=\cos\mu x Y_1(\mu)-\sin\mu x J_1(\mu). \tag{22}$$

Для сведения интегрального уравнения (18) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений представим функцию $S(x)$ в виде ряда по многочленам Лежандра:

$$S(x)+c=1/x\sum_{m=1}^{\infty}X_m P_{2m-1}(a/x). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (18) и используя ортогональность функций Лежандра для неизвестных коэффициентов X_n, получим бесконечную систему

$$X_n=\sum_{m=1}^{\infty}X_m A_{mn}+b_n\quad (n=1;2;3;\ldots) \tag{24}$$

где

$$A_{m,n}=\frac{1}{(4m-1)a}\int_a^\infty \Pi_n(x)dx\int_a^\infty \Pi_m(t)[xt\cdot k(t,x)]''_{x,t}dt$$

$$b_n=\int_a^\infty \Pi_n(x)[x\Phi^*(x)]'_x dx$$

$$\Pi_n(x)=P_{2n}(a/x)-P_{2(n-1)}(a/x) \tag{25}$$

$$\Phi^*(x)=\Phi(x)-c\int_0^\infty\left\{\frac{I_1(\mu)}{K_1(\mu)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\mu K_1(\mu)\Delta(\mu)}\left[\mu(a-\nu_2(\mu))\omega_1(\mu,x)+2(1-\nu_2)G\omega_2(\mu,x)\right]\right\}\frac{e^{-\mu(a+x)}}{\mu}d\mu$$

Учитывая оценки для многочленов Лежандра (6)

$$\left|P_n(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{n\pi\cdot(1-x^2)}\right)^{1/2},\quad |x|<1 \tag{26}$$

и поведения функций $K(t,x)$ и $\Phi(x)$ показывается, что сумма модулей коэффициентов бесконечной системы убывает

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|A_{m,n}\right|\to\frac{A_0}{n^{1/2}},$$

а свободный член имеет порядок $O(1/n^{3/2})$.

Отсюда следует, что сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечной системы (24) при возрастании номера n стремится к нулю не медленнее, чем $n^{-1/2}$. Следовательно, система (24) квазивполне регулярна.

Равнодействующая контактных напряжений P определяется из условия

$$\int_0^1 \sigma_z^{(1)}(r,0)rdr+\int_1^c \sigma_z^{(2)}(r,0)\cdot r\cdot dr=\frac{P}{2\pi}$$

которая также показывает связь между силой P и вертикальным перемещением штампа c, которое фигурирует во всех полученных выражениях.

THE OXISIMMETRICAL CONTACT PROBLEM FOR AN COMPOSITE HALFE SPEASE

S. H. PAPOYAN

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ս. Հ. ՓԱՊՈՅԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է գլանային խոռոչ ունեցող կիսատարածության կոնտակտային խնդիրը, երբ խոռոչի մեջ դրված է ուրիշ նյութից պատրաստված գլան, իսկ ընդհանուր ճակատային հարթության վրա գործում է կոշտ դրոշմը։ Խնդրի լուծումը բերված է ինտեգրալ հավասարման, այնուհետև քվազիլիովին ռեգուլյար համակարգի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.—Изв. АН АрмССР, Механика. 1969 г., т. 22, № 2, с. 3—13.
2. *Макарян В. С., Папоян С. О.* Об одной контактной задаче для упругого полупространства с полубесконечной цилиндрической выемкой.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1980 г., т. 33, № 1, с. 3—11.
3. *Папоян С. О.* Осесимметричная контактная задача для составного упругого слоя.—В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. вып. 2.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1983, с. 120—128.
4. *Папоян С. О.* Осесимметричная контактная задача для составного полупространства с полубесконечным разрезом на контактной поверхности.—В сб.: Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1986, с. 144—150.
5. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2.—М.: Наука, 1977, 295 с.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Наука, 1971. 1108 с.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию
29.X.1992