ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, № 3–4, 1993 Механика

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

ГРИГОРЯН Ш. А., ОГАНЯН Г. Г.

Одно из стационарных решений уравнения Кортевега-де Вриза описывает поведение периодической волны в диспергирующей среде. В случае, когда величина параметра нелинейности стремится к единице, периодическая волна преобразовывается в солитон. В данной работе получено ее представление через бесконечную сумму убывающих по амплитуде солитонов в случае, когда величина параметра лежит в интервале (0,1).

1. **Постановка задачи.** Широко известно [1,2], что в газожидкостной смеси без учета ее диссипативных свойств, а также в мелкой воде и плазме распространение слабых ударных волн описывается уравнением Кортевега-де Вриза

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma u\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1.1}$$

Здесь σ, γ — коэффициенты нелинейности и дисперсии, характеризуемые физико-механическими свойствами среды.

Если решение уравнения (1.1) искать в виде стационарных волн $u=u(\xi)$, $\xi=x-Vt$, где V — скорость фронта волны, то после двукратного интегрирования приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению, правая часть которого представляет собой кубический полином от искомой функции u. Это уравнение интерпретируется [1,2] как уравнение ангармонического осциллятора, описывающего периодическое движение между смежными вещественными нулями кубического полинома. Если полином имеет три вещественных корня $b_1>b_2>b_3$, то интегрирование уравнения приводит к ограниченному стационарному решению

$$u(\xi)=b_2+(b_1-b_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{\sigma}{12\gamma}(b_1-b_3)}\,\xi,k\right)=$$
$$=b_3+\frac{b_1-b_2}{k^2}\,\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{\frac{\sigma}{12\gamma}(b_1-b_2)}\,\frac{\xi}{k},k\right) \tag{1.2}$$

которое описывает поведение периодической (кноидальной) волны с периодом T. Здесь параметр k представляет собой меру (уровень) нелинейности волны, определяемый формулой

$$k^2=\frac{b_1-b_2}{b_1-b_3},\quad 0<k<1,\quad T=2K(k)\sqrt{\frac{12\gamma}{\sigma(b_1-b_3)}}$$

В предельном случае, когда $b_3 \to b_2$, имеем $k \to 1$. Когда $\mathrm{cn}(z,k) \to \mathrm{sech}\, z$ и решение (1.2) асимптотически переходят в решение

$$u(\xi)=b_2+(b_1-b_2)\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\alpha}{12\gamma}(b_1-b_2)}\,\xi\right] \tag{1.3}$$

описывающее поведение уединенной волны (солитона). Таким образом, кноидальная волна при $k \to 1$ преобразуется в солитон с амплитудой $a=b_1-b_2$.

В общем случае, когда $0<k<1$, актуальной становится постановка задачи о представлении решения (1.2) через сумму решений солитонного типа (1.3).

2. Для разрешения поставленной задачи воспользуемся формулой разложения функции $\mathrm{dn}^2(z,k)$ в ряд по параметру Якоби q [3]

$$\mathrm{dn}^2(z,k)=\frac{E(k)}{K(k)}+\frac{2\pi^2}{K^2(k)}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cos\left(\frac{\pi z}{K}n\right)$$

$$q=\exp\left[-\pi\frac{K'(k)}{K(k)}\right], \quad K'(k)=K(k_1), \quad k_1=\sqrt{1-k^2} \tag{2.1}$$

Здесь $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Разложение справедливо при выполнении условия,

$$\left|\mathrm{Im}\,\frac{\pi z}{K(k)}\right|<\mathrm{Re}(-\ln q)$$

которое для вещественных z выполняется всегда. Представим предложенное разложение в виде

$$\mathrm{dn}^2(z,x)=\frac{E(k)}{K(k)}+\frac{\pi^2}{K^2(k)}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\cos\left[n\pi\frac{z}{K(k)}\right]}{\mathrm{sh}\left[n\pi\frac{K'(k)}{K(k)}\right]}=$$

$$=\frac{E}{K}+\frac{\pi^2}{2K^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\frac{\exp(i\pi nz/K)}{\mathrm{sh}(\pi nK'/K)}; \quad z=\sqrt{\frac{\alpha b}{6\gamma}}\frac{\xi}{k}$$

Для получения всего спектра необходимо включить в ряд значение функции при $n=0$. Вычисляя по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{n\to 0} n\frac{\exp(i\pi nz/K)}{\mathrm{sh}(\pi nK'/K)}=\frac{K(k)}{\pi K'(k)} \tag{2.2}$$

Тогда предыдущее представление разложения можно записать как

$$\mathrm{dn}^2(z,k)=\frac{E}{K}-\frac{\pi}{2KK'}+\frac{\pi^2}{2K^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau), \quad \tau=2\pi n \tag{2.3}$$

где функция $f(2\pi n)$ определена следующим образом:

$$f(2\pi n)=\begin{cases} K/(\pi K') & n=0 \\ \dfrac{2\pi n}{2\pi}\dfrac{\exp[i(2\pi n)(z/2K)]}{\mathrm{sh}[(2\pi n)(K'/2K)]} & n\neq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Используя известное [1] соотношение Лежандра для эллиптических интегралов, разложение (2.3) можно представить в виде

$$\mathrm{dn}^2(z,k)=1-\frac{E(k_1)}{K(k_1)}+\frac{\pi^2}{2K^2(k)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) \tag{2.5}$$

Если $f(2\pi n)$ представляет собой такую непрерывную и непрерывно-дифференцируемую функцию от n, что ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n+t), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(2\pi n+t); \quad f'=\frac{df}{dn} \tag{2.6}$$

сходятся абсолютно и равномерно для всех значений t из интервала $[0,2\pi]$, то можно использовать формулу суммирования Пуассона [5], а именно: первый ряд из (2.6) представить в этом интервале в виде сходящегося ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-im\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m) \tag{2.7}$$

Вспоминая определение (2.1) функции $f(2\pi n)$ и вычисляя интеграл в формуле (2.7), получим [6]

$$F(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\exp[i(z/2K(k))\tau]}{\mathrm{sh}[(K(k_1)/2K(k))\tau]}\exp(-im\tau)d\tau=$$

$$=\pi\frac{K^2(k)}{K^2(k_1)}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\pi}{2K(k_1)}(z-mK(k))\right]$$

Тогда, согласно представлению разложения (2.5), решение (1.3) периодической волны перепишется в виде

$$\begin{gathered}u(\xi)=b_3+\frac{2b}{1-k_1^2}\left[1-\frac{E(k_1)}{K(k_1)}\right]+\\+\frac{b}{1-k_1^2}\,\frac{\pi^2}{2K^2(k_1)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{z-2mK(k)}{K(k_1)}\right]\end{gathered} \tag{2.8}$$

Для правомерности использования формулы Пуассона (2.7) необходимо доказать, что $f(2\pi n)$ является непрерывной и непрерывно-дифференцируемой функцией, а ряды (2.6) абсолютно и равномерно сходятся. Доказательства ввиду громоздкости выкладок не приводятся.

Решение (2.8) можно записать в несколько иной форме

$$\begin{gathered}u(\xi)=u(k)-\frac{b}{k^2}\,\frac{\pi}{K(k)K(k_1)}+\frac{b}{k^2}\,\frac{\pi^2}{2K^2(k_1)}\Big\{\mathrm{sech}^2B\xi+\\+\sum_{m=1}^{\infty}[\mathrm{sech}^2B(\xi-mT)+\mathrm{sech}^2B(\xi+mT)]\Big\}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь $u(k)$ — среднее значение, определяемое как

$$u(k)=b_2+\frac{2b}{k^2}\frac{E(k)}{K(k)},\quad B=\frac{1}{k}\frac{\pi}{2K(k_1)}\left(\frac{\alpha b}{6\gamma}\right)^{1/2}$$

Такое определение $u(k)$ совпадает с выражением, полученным в [2]. В предельном случае, когда $k\to 1(k_1\to 0)$, из решения (2.9) получаем

$$u(\xi)=b_3+2b\,\mathrm{sech}^2 B\xi$$

то есть, как и следовало ожидать, приходим к предельному решению (1.3).

Ввиду того, что, независимо от переменной ξ и параметра k

$$\lim_{m\to\pm\infty}\mathrm{sech}^2 B(\xi+mT)=0$$

в решении (2.9) можно ограничиться рассмотрением суммы сколь угодно большого числа N волн. Отметим, что представление стационарного решения уравнения КдВ через бесконечную сумму солитонных решений, в принципе, предложено в [8].

Известно [7], что только при распространении несущего некую информацию импульса в виде солитона она переносится на большие расстояния без искажения и без заметного затухания ее интенсивности. Полученная (2.9) форма записи решения (1.2) дает возможность проследить за поведением периодической волны как возможного носителя такой информации.

В заключение отметим, что, когда $k\ll 1$, разложение (2.1) дает возможность представить периодическое решение (1.3) в виде

$$u(\xi)=u(k)+b\left|\cos\varkappa\xi+\frac{k^2}{8}\cos 2\varkappa\xi+\frac{3k^4}{256}\cos 3\varkappa\xi+O(k^6)\right|$$

Здесь $\varkappa$ — волновое число, связь которого с амплитудой и параметром k определяется соотношением

$$\frac{1}{\varkappa^2}=\frac{3\gamma}{2\alpha b}k^2\left(1+\frac{k^2}{2}+\frac{11}{32}k^4\right)+O(k^8)$$

Первые два члена в приведенных разложениях получены в [2].

ON THE ALTERNATIVE PRESENTATION OF PERIODIC SOLUTION OF KORTEVEG—DE VRIES EQUATION

SH. H. GRIGORIAN, G. G. OHANIAN

ԿՈՐՏԵՎԵԳ–ԴԸ ՎՐԻԶ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԱՅԼ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Շ. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Կորտևեգ-դը Վրիզի հավասարման ստացիոնար լուծումներից մեկը նր-

կարագրում է պարբերական ալիքի տարածումը դիսպերսիվ միջավայրում։ Երբ այդ ալիքի ոչ գծայնության չափը բնութագրող պարամետրը ձգտում է մեկի, ապա պարբերական ալիքը վերածվում է սոլիտոնի։ Տվյալ աշխատանքում երբ վերոհիշյալ պարամետրը պատկանում է (0,1) միջակայքին, գտնված է պարբերական ալիքի ներկայացումը անվերջ թվով սոլիտոնների բազմության գումարի տեսքով, որոնք դասավորված են ըստ ամպլիտուդայի մեծության նվազմամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.—Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 237 с.
2. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.—М.: Наука, 1973. 176 с.
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.—М.: Наука, 1981. 800 с.
4. *Абрамовиц М.* и *Стиган И.* Справочник по специальным функциям: пер. с англ.—М.: Наука, 1979. 832 с.
5. *Курант Р.* и *Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. Пер. с англ.—М.—Л.: Гостехтеориздат, 1951. 476 с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1986. 800 с.
7. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. Пер. с англ.—М.: Мир, 1983. 136 с.
8. *Whitham G. B.* Comments on periodic waves and solutions || IMA J. Appl. Math. 1984, № 32, P. 353—366.

Институт математики АН Армении
Институт механики АН Армении

Поступила в редакцию
30.05.1991