ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 46, № 3—4, 1993 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

АГАЛОВЯН Л. А., ТОВМАСЯН А. Б.

В работе рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой—нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Задача, в частности, моделирует взаимодействие фундамента с жестким основанием с учетом трения между фундаментом и основанием. Установлена асимптотика всех компонентов тензора напряжений и вектора перемещения, которая принципиально отличается от асимптотики тех же величин по классической теории пластин. Используя найденную асимптотику, решение пространственной задачи сведено к двумерной. Выведены рекуррентные формулы для определения напряжений и перемещений, соответствующие внутренней задаче.

Доказана неприменимость гипотез Кирхгофа-Лява классической теории пластин и оболочек к указанным задачам.

Для решения пространственных краевых задач теории упругости тонкостенных тел (или сведения к двумерным задачам), одним из эффективных методов оказался асимптотический. Этим методом построена асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек [1—4], анизотропных пластин и оболочек [5—7]. Метод оказался эффективным при рассмотрении задач взаимодействия тонкостенных тел с различными физическими полями [8—12]. Этим же методом решены новые классы неклассических краевых задач пластин и оболочек (на лицевых поверхностях пластин и оболочек заданы компоненты вектора перемещения или условия третьей краевой задачи теории упругости) [13—17]. Была установлена неприменимость гипотез Кирхгофа-Лява классической теории пластин и оболочек к указанным задачам. Рассмотрение этого класса задач позволило установить также связь между решением краевой задачи теории упругости и моделью Винклера-Фусса для упругого основания, вывести формулу для вычисления коэффициента постели анизотропного основания и основания с переменными по толщине упругими свойствами [14—16].

1. Требуется найти решение уравнений пространственной задачи термоупругости анизотропного тела в области $\Omega=\{x, y, z: x, y \in \Omega_0, |z| \leq h, h \ll a\}$, где Ω_0—область, занятая срединной поверхностью пластинки, a—характерный тангенциальный размер пластинки. Считается, что анизотропия—самая общая (21 упругая константа), на пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x(x, y, z)$,

$F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ и температурные воздействия. Изменение температурного поля характеризуется функцией $\Theta=T-T_0$, которая считается известной, то есть рассматривается несвязанная задача термоупругости в силу статической постановки задачи [18]. На лицевых поверхностях заданы условия:

$$\sigma_{xz}=\sigma^{+}_{xz}(x,y),\quad \sigma_{yz}=\sigma^{+}_{yz}(x,y)$$
$$\sigma_z=\varepsilon^{-1}\sigma^{+}_z(x,y),\quad \text{при}\quad y=h, \tag{1.1}$$

$$w=\varepsilon^{-1}w^{-}(x,y),\quad \sigma_{xz}=\sigma^{-}_{xz}(x,y)$$
$$\sigma_{yz}=\sigma^{-}_{yz}(x,y),\quad \text{при}\quad y=-h \tag{1.2}$$

Условия на боковой поверхности пока будем считать произвольными.

Чтобы решить поставленную трехмерную краевую задачу, в уравнениях и соотношениях термоупругости перейдем к безразмерным переменным $\xi=x/a$, $\eta=y/a$, $\zeta=z/h$ и безразмерным перемещениям $U=u/a$, $V=v/a$, $W=w/a$. В результате получаем следующую сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon=h/a$ систему:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\zeta}+aF_x=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial\zeta}+aF_y=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_z}{\partial\zeta}+aF_z=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+a_{14}\sigma_{yz}+a_{15}\sigma_{xz}+a_{16}\sigma_{xy}+\alpha_{11}\Theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+\ldots+a_{26}\sigma_{xy}+\alpha_{22}\Theta$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+\ldots+a_{36}\sigma_{xy}+\alpha_{33}\Theta$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta}+\frac{\partial W}{\partial\eta}=a_{14}\sigma_x+a_{24}\sigma_y+\ldots+a_{46}\sigma_{xy}+\alpha_{23}\Theta \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{15}\sigma_x+a_{25}\sigma_y+\ldots+a_{56}\sigma_{xy}+\alpha_{13}\Theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial\eta}+\frac{\partial V}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_x+a_{26}\sigma_y+\ldots+a_{66}\sigma_{xy}+\alpha_{12}\Theta$$

где a_{ik} — упругие коэффициенты податливости, α_{ij} — коэффициенты теплового расширения.

Решение системы (1.3) складывается из решения внутренней задачи и пограничного слоя [1, 3, 7, 19]. Решение внутренней задачи или проникающее решение ищем в виде

$$Q = \varepsilon^{q_i + s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = \overline{0, N} \tag{1.4}$$

где Q — любая из искомых величин, по немому индексу s ведется суммирование от нуля до числа приближений N, q_i — целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Эта цель достигается лишь при

$$q_i = -1 \quad \text{для} \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, U, V, W$$

$$q_i = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \tag{1.5}$$

Вклад объемных сил и температурных воздействий в общее напряженное состояние будет соизмеримым со вкладом поверхностных сил, если

$$F_x = \varepsilon^{-1+s} a^{-1} F_x^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, y)$$

$$F_z = \varepsilon^{-2+s} a^{-1} F_z^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \tag{1.6}$$

$$\Theta = \varepsilon^{-1+s} \Theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

откуда следует, что нормальная составляющая объемной силы должна иметь достаточно большую интенсивность, в противном случае влияние объемных сил будет меньше и соответствующие слагаемые войдут в уравнения для более высоких приближений. Для сравнения с найденной асимптотикой (1.4), (1.5), приведем асимптотику решения задачи классической теории пластинок (на лицевых поверхностях $y = \pm h$ заданы компоненты тензора напряжений) [1, 5]:

$$q_i = -2 \quad \text{для} \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, U, V \tag{1.7}$$

$$q_i = -1 \quad \text{для} \quad \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \quad q_i = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_z, \quad q_i = -3 \quad \text{для} \quad W$$

Сравнение асимптотики (1.5) с (1.7) показывает их принципиальное различие. Асимптотика (1.4), (1.5) существенно отличается и от асимптотики во второй и третьей краевых задачах [13—15]. Ниже убедимся, что это отличие существенным образом влияет на структуру основных разрешающих уравнений.

2. Подставив (1.4) в (1.3), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом (1.5), (1.6) получим следующую систему относительно $Q^{(s)}$

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_x^{(s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} + F_y^{(s)} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} + F_z^{(s)} = 0$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi}=a_{11}\sigma_x^{(s)}+a_{12}\sigma_y^{(s)}+a_{13}\sigma_z^{(s)}+a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{16}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{11}\Theta^{(s)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \eta}=a_{12}\sigma_x^{(s)}+a_{22}\sigma_y^{(s)}+a_{23}\sigma_z^{(s)}+a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)}+a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{26}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{22}\Theta^{(s)}$$

$$\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{13}\sigma_x^{(s-1)}+a_{23}\sigma_y^{(s-1)}+a_{33}\sigma_z^{(s-1)}+a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{33}\Theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}=a_{14}\sigma_x^{(s-1)}+a_{24}\sigma_y^{(s-1)}+a_{34}\sigma_z^{(s-1)}+ \tag{2.1}$$

$$+a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{23}\Theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}+\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}=a_{15}\sigma_x^{(s-1)}+a_{25}\sigma_y^{(s-1)}+a_{35}\sigma_z^{(s-1)}+$$

$$+a_{45}\sigma_{yz}^{(s-2)}+a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)}+a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)}+\alpha_{13}\Theta^{(s-1)}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \eta}+\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi}=a_{16}\sigma_x^{(s)}+a_{26}\sigma_y^{(s)}+a_{36}\sigma_z^{(s)}+a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)}+$$

$$+a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)}+a_{66}\sigma_{xy}^{(s)}+\alpha_{12}\Theta^{(s)}$$

Учитывая, что $Q^{(s)}=0$ при $s<0$, из системы (2.1) можно определить все неизвестные величины с точностью некоторых функций, зависящих только от переменных ξ, η. Приведем процедуру решения системы (2.1). Из третьего уравнения равновесия определяется $\sigma_z^{(s)}$, из шестого, седьмого, восьмого уравнений системы определяются $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, $W^{(s)}$, а из четвертого, пятого, девятого уравнений, с учетом уже определенных величин, определяются $\sigma_y^{(s)}$, $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_{xy}^{(s)}$. Вернувшись к первым двум уравнениям системы (2-1), определятся $\sigma_{xz}^{(s)}$, $\sigma_{yz}^{(s)}$. В результате имеем решение:

$$\sigma_z^{(s)}=\sigma_{z0}^{(s)}(\xi,\eta)+\sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad W^{(s)}=w^{(s)}(\xi,\eta)+w^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$V^{(s)}=v^{(s)}(\xi,\eta)+v^{*(s)},\quad U^{(s)}=u^{(s)}(\xi,\eta)+u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)}=A_{11}\sigma_{z0}^{(s)}+L_{11}u^{(s)}+L_{12}v^{(s)}+\sigma_x^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$\sigma_y^{(s)}=A_{22}\sigma_{z0}^{(s)}+L_{21}u^{(s)}+L_{22}v^{(s)}+\sigma_y^{*(s)}$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}=A_{66}\sigma_{z0}^{(s)}+L_{61}u^{(s)}+L_{62}v^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}$$

$$\sigma_{xz}^{(s)}=\sigma_{xz0}^{(s)}(\xi,\eta)-\zeta\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{61}}{\partial \eta}\right)u^{(s)}-$$

$$-\zeta\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{62}}{\partial \eta}\right)v^{(s)}-\zeta\left(A_{11}\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \xi}+A_{66}\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \eta}\right)+\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.2}$$

$$\sigma_{yz}^{(s)}=\sigma_{yz0}^{(s)}-\zeta\left(\frac{\partial L_{61}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{21}}{\partial \eta}\right)u^{(s)}-\zeta\left(\frac{\partial L_{62}}{\partial \xi}+\frac{\partial L_{22}}{\partial \eta}\right)v^{(s)}-$$

$$-\zeta\left(A_{66}\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \xi}+A_{22}\frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}}{\partial \eta}\right)+\sigma_{yz}^{*(s)}$$

Здесь

$$A_{13} = (a_{13}B_{26} + a_{23}B_{12} + a_{63}B_{62})/\Delta, \ (1,2)$$

$$A_{63} = (a_{13}B_{62} + a_{23}B_{61} + a_{63}A_{12})/\Delta$$

$$A_{12} = a_{12}^{2} - a_{11}a_{22}, \quad B_{12} = a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}$$

$$B_{16} = a_{16}^{2} - a_{11}a_{66}, \quad B_{61} = a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16}, \ (1,2)$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{66} + 2a_{12}a_{26}a_{16} - a_{11}a_{26}^{2} - a_{22}a_{16}^{2} - a_{66}a_{12}^{2} \tag{2.3}$$

$$B_{6} + B_{6j}$$

$$L_{11} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{26}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{62}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad L_{33} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{62}\frac{\partial}{\partial\xi} + A_{12}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$L_{22} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{12}\frac{\partial}{\partial\xi} + B_{61}\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad L_{13} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{12}\frac{\partial}{\partial\eta} + B_{62}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$L_{23} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{16}\frac{\partial}{\partial\eta} + B_{61}\frac{\partial}{\partial\xi}\right), \quad L_{63} = -\frac{1}{\Delta}\left(B_{61}\frac{\partial}{\partial\eta} + A_{12}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

Величины $Q^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta)$ для каждого s являются известными функциями, если определены величины предыдущих приближений. Они вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\sigma_z^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left(F_z^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial\eta}\right)d\zeta,$$

$$w^{*(s)} = \int_0^{\zeta}(a_{31}\sigma_x^{(s-1)} + a_{32}\sigma_y^{(s-1)} + a_{33}\sigma_z^{(s-1)} + a_{34}\sigma_{yz}^{(s-2)} +$$

$$+ a_{35}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{36}\sigma_{xy}^{(s-1)} + \alpha_{33}\theta^{(s-1)})d\zeta,$$

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{41}\sigma_x^{(s-1)} + a_{42}\sigma_y^{(s-1)} + a_{43}\sigma_z^{(s-1)} + a_{44}\sigma_{yz}^{(s-2)} +$$

$$+ a_{45}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{46}\sigma_{xy}^{(s-1)} + \alpha_{23}\theta^{(s-1)} - \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\Big)d\zeta,$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\Big(a_{51}\sigma_x^{(s-1)} + a_{52}\sigma_y^{(s-1)} + a_{53}\sigma_z^{(s-1)} + a_{54}\sigma_{yz}^{(s-2)} +$$

$$+ a_{55}\sigma_{xz}^{(s-2)} + a_{56}\sigma_{xy}^{(s-1)} + \alpha_{13}\theta^{(s-1)} - \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\Big)d\zeta,$$

$$\sigma_x^{*(s)} = -\frac{1}{\Delta}(b_1^{(s)}B_{26} + b_2^{(s)}B_{12} + b_3^{(s)}B_{62})$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\frac{1}{\Delta}(b_1^{(s)}B_{12} + b_2^{(s)}B_{16} + b_3^{(s)}B_{61}) \tag{2.4}$$

$$\sigma_{xy}^{*(s)} = -\frac{1}{\Delta}\left(b_1^{(s)}B_{12} + b_2^{(s)}B_{13} + A_{33}b_3^{(s)}\right)$$

$$\sigma_{xz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[F_x^{(s)} + \frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\eta}\right]d\zeta$$

$$\sigma_{yz}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[F_y^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_y^{*(s)}}{\partial\eta}\right]d\zeta$$

$$b_1^{(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi} - a_{13}\sigma_z^{*(s)} - a_{14}\sigma_{yz}^{(s-1)} - a_{15}\sigma_{xz}^{(s-1)} - \alpha_{11}\theta^{(s)}$$

$$b_2^{(s)} = \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\eta} - a_{23}\sigma_z^{*(s)} - a_{24}\sigma_{yz}^{(s-1)} - a_{25}\sigma_{xz}^{(s-1)} - \alpha_{22}\theta^{(s)}$$

$$b_3^{(s)} = \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi} - a_{36}\sigma_z^{*(s)} - a_{46}\sigma_{yz}^{(s-1)} - a_{56}\sigma_{xz}^{(s-1)} - \alpha_{12}\theta^{(s)}$$

Как следует из формул (2.2), (2.4), вклад объемных сил и температурного поля в общее напряженное состояние вычисляется непосредственно, входящими в (2.4) соответствующими интегралами.

В (2.2) неизвестными являются функции $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(s)}$, $\sigma_z^{(s)}$, $\sigma_{yz0}^{(s)}$, $\sigma_{xz0}^{(s)}$, которые должны быть определены из условий (1.1), (1.2) и условий на боковой поверхности. Удовлетворяя условиям (1.1), (1.2), получим

$$w^{(s)}(\xi,\eta) = w^{-(s)} - w^{*(s)}(\xi,\eta,-1)$$

$$\sigma_z^{(s)}(\xi,\eta) = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(s)}(\xi,\eta,1) \qquad (2.5)$$

$$\sigma_{xz0}^{(s)}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[\sigma_{xz}^{+(s)} + \sigma_{xz}^{-(s)} - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,1) - \sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1)\right], \ (x,y)$$

где

$$\sigma_z^{+(0)} = \sigma_z^{+},\ \sigma_{xz}^{\pm(0)} = \sigma_{xz}^{\pm},\ \sigma_z^{-(s)} = \sigma_{xz}^{\pm(s)} = 0, \quad (s>0),\ (x,\ y)$$

для определения же величин $u^{(s)}$, $v^{(s)}$ получаются следующие дифференциальные уравнения

$$L_1u^{(s)} + L_2v^{(s)} = P_1^{(s)}$$

$$\qquad (2.6)$$

$$L_2u^{(s)} + L_3v^{(s)} = P_2^{(s)}$$

где

$$L_1 = \frac{\partial L_{11}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{31}}{\partial\eta},\quad L_2 = \frac{\partial L_{13}}{\partial\xi} + \frac{\partial L_{33}}{\partial\eta}$$

$$\qquad (2.7)$$

$$L_3=\frac{\partial L_{32}}{\partial\xi}+\frac{\partial L_{22}}{\partial\eta},\quad L_4=\frac{\partial L_{42}}{\partial\xi}+\frac{\partial L_{23}}{\partial\eta}$$

$$P_1^{(s)}=\frac{1}{2}\left[\sigma_{xz}^{-(s)}-\sigma_{xz}^{+(s)}-\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1)+\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi,\eta,1)\right]-$$

$$-A_{13}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}+A_{53}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}$$

$$P_2^{(s)}=\frac{1}{2}\left[\sigma_{yz}^{-(s)}-\sigma_{yz}^{+(s)}-\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi,\eta,-1)+\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi,\eta,1)\right]-$$

$$-A_{53}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\xi}-A_{23}\frac{\partial\sigma_{z0}^{(s)}}{\partial\eta}$$

Решив систему (2.6) в частных производных четвертого порядка, определим $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, а по формулам (1.4), (1.5), (2.2), (2.5) определятся все искомые величины. Поскольку система (2.6) эллиптическая и четвертого порядка, то приведенных краевых условий на боковой поверхности должны быть два. Если особо не рассматривать пограничный слой, то для исходного приближения эти условия можно выписать, осреднив по толщине условия на боковой поверхности пластинки относительно тангенциальных величин.

Отметим некоторые различительные стороны полученных двумерных уравнений по сравнению с классическими и другими [1, 5, 15]. В случае классической теории пластинок [1, 2, 5] получаются дифференциальные уравнения не только относительно тангенциальных компонентов u, v вектора перемещения, но и относительно нормальной компоненты w. В нашем случае уравнения получились относительно u, v, а w определяется для каждого приближения арифметическими действиями по формуле (2.5), то есть условия на лицевых поверхностях диктуют вид приведенных двумерных уравнений и изменив лишь одно условие по сравнению с классическими (в нашем случае на $y=-h$, относительно w), коренным образом можно менять характер напряженно-деформированного состояния пластинки, что ярко проявляется в асимптотиках (1.5), (1.7) всех искомых величин. Сказанное еще ярче проявляется в случаях второй и третьей краевых задач [15], когда не получается никакое двумерное приведенное уравнение и величины u, v, w полностью определяются при помощи условий на $y=\pm h$, а условиями на боковой поверхности обуславливается появление лишь пограничного слоя.

Систему (2.6) можно свести к решению одного уравнения четвертого порядка. Для этого применим к обеим частям первого уравнения оператор L_4, а ко второму — $(-L_2)$ и сложим, в результате получим уравнение

$$(L_1L_4-L_2L_3)u^{(s)}=L_4P_1^{(s)}-L_2P_2^{(s)}\tag{2.8}$$

Для ортотропных пластинок, когда главные направления анизотропии совпадают с направлениями координатных линий

$$a_{14}=a_{24}=a_{34}=a_{15}=a_{25}=a_{35}=a_{15}=a_{16}=a_{26}=a_{36}=a_{46}=a_{56}=0, \qquad (2.9)$$

приведенные выше формулы значительно упрощаются.

В заключение отметим, что мы здесь рассмотрели лишь внутреннюю задачу, вопрос о пограничном слое и его взаимодействии с решением внутренней задачи предмет отдельного рассмотрения, что можно осуществить указанным в [2, 7, 20] способом.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF MIXED THREE DIMENSIONAL INTERIOR PROBLEM FOR ANISOTROPIC THERMOELASTIC PLATES

L. A. AGHALOVIAN, A. B. TOVMASIAN

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԵՌԱՉԱՓ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՆԵՐՔԻՆ ԽՆԴՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ, Ա. Բ. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Ստացված է ասիմպտոտիկ լուծում ընդհանուր առաձգական և ջերմային անիզոտրոպիաներով օժտված սալի ներքին տիրույթում, երբ սալի ճակատային նիստերից մեկի վրա տրված են լարման տենզորի բաղադրիչները, իսկ մյուս նիստի վրա տեղափոխման վեկտորի նորմալ բաղադրիչ և տանգենցիալ լարումները։

Ապացուցված է Կիրխհոֆ-Լյավի վարկածի անընդունելի լինելը նշված դասի խնդիրների համար։ Ստացված են երկչափ բերված հավասարումներ տեղափոխման վեկտորի տանգենցիալ բաղադրիչների նկատմամբ և ներկայացված բանաձևեր անհայտ լարումների և տեղափոխումների որոշման համար։

Ապացուցված է սալի ճակատային նիստերի վրա դրված պայմանների տեսքի որոշիչ ազդեցությունը բերված երկչափ խնդրի բնույթի վրա։ Մասնավորապես ցույց է տրված, որ ի տարբերություն դասական տեսության, այստեղ չի ստացվում հավասարում տեղափոխման վեկտորի նորմալ բաղադրիչի նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 668—686.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.—М.: Наука, 1976, 512 с.
3. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.—В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин.—Тбилиси, Изд.-во Тбилисск. ун-та, 1975.
4. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г., Устинов Ю. А.* К теории неоднородных по толщине плит.—Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 3, с. 119—130.

5. *Агаловян Л. А.* К теории изгиба ортотропных пластин.—Изв. АН СССР. МТТ, 1966, №6, с. 116—121.
6. *Агаловян Л. А.* О некоторых соотношениях линейной теории анизотропных оболочек и возможностях их уточнения.—Изв. АН СССР, 1972, №1, с. 109—120.
7. *Агаловян Л. А.* О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий.—Докл. АН АрмССР, 1979, т. 69, №3, с. 151—156.
8. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
9. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория термоупругих оболочек.—В сб.: Тр. X Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси, Мецниереба, 1975, с. 251—259.
10. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя.—Прикл. механика, 1978, т. 14, №5.
11. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория пьезокерамических оболочек.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, №1, с. 55—64.
12. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой анизотропной оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости.—Материалы II Всесоюзн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван, Изд. ЕГУ, 1984, с. 130—135.
13. *Агаловян Л. А.* О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.—Межвуз. сборник научн. тр. Механика, изд-во ЕГУ, 1982, вып. 2, с. 7—12.
14. *Агаловян Л. А.* К определению напряженно-деформированного состояния двухслойной полосы и о справедливости гипотезы Винклера.—Тр. XIII Всесоюзн. конф. по теории пластин и оболочек. Таллин, 1983, с. 13—18.
15. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок.—ПММ, 1986, т. 50, вып. 2, с. 271—278.
16. *Агаловян Л. А., Адамян С. Х.* О коэффициенте постели для оснований с переменными упругими характеристиками.—Докл. АН АрмССР, 1987, т. 84, №3, с. 115—118.
17. *Агаловян Л. А., Товмасян А. Б.* О смешанной краевой задаче для анизотропной термоупругой полосы.—Докл. АН Армении, 1991, т. 92, №2, с. 76—81.
18. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости.—М.: Мир, 1970. 256 с.
19. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973. 272 с.
20. *Агаловян Л. А.* О погранслое пластинок.—Докл. АН АрмССР, 1972, т. 55, №3, с. 149—155.

Институт Механики
АН Армении

Поступила в редакцию
7.07.1992