

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНОЛОГИИ

Гонтаровский П.П., Пантелят М.Г.

Գոնտարովսկի Պ.Պ., Պանտելյատ Մ.Գ. Հոն ճիջավայրի մեխանիկայի խնդիրները էլեկտրատեխնոլոգիայում

Աշխատանքում քննվում են էլեկտրոտեխնոլոգիական գործընթացների ժամանակ հանդիարող ֆիզիկա-մեխանիկական երևույթների ճարձմատիկական մոդելները: Անարագություն է ապահովապիմատուրկն ինտոի քվային լուծման մեթոդիկան: Խնդիրները լուծվում են վերջավոր էլեմենտների մեթոդով:

Gontarovskiy P.P., Pantelyat M.G. Solid Mechanics Problems in Electrotechnology

В работе представлены математические модели физико-механических процессов (изменение электромагнитного, теплового и механического состояния), имеющих место при осуществлении ряда электротехнологических процессов. Описана методика численного решения задач в осесимметричной постановке. Три связанные краевые задачи (моделирование электромагнитного поля, теплопроводности и термоупругоэластичности) решаются единым универсальным численным методом - методом конечных элементов.

В современном машиностроительном производстве широкое применение получили прогрессивные технологические процессы обработки металла: индукционный нагрев [1], магнито-импульсная обработка [2], термообработка сердечников коротких замыкающих импульсов электромагнитного поля [3], контактная сварка [4]. В обрабатываемых изделиях и в рабочих узлах оборудования (индукторах, электродах) протекают взаимосвязанные физико-механические процессы (изменение электромагнитного, теплового и напряженно-деформированного состояния), определяющие ход и результат технологической операции. Исследование связанных полей в данных объектах является актуальной задачей механики электромагнитных сплошных сред и представляет значительный научный и практический интерес.

Задача расчета связанных нелинейных физико-механических процессов в осесимметричной постановке может быть успешно решена с помощью метода конечных элементов (МКЭ) - эффективного численного метода решения задач математической физики [5]. МКЭ представляет собой вариационный метод с кусочно-полиномиальными пробными функциями, позволяющий достаточно точно учитывать сложные криволинейные границы области и краевые условия.

1. Моделирование электрических и магнитных полей

В простейшем случае, осесимметричная индукторная система индукционных и магнито-импульсных установок (фиг.1) включает индуктор 1, обрабатываемую заготовку 2 и диэлектрические подобласти (воздух) 3.

Математическое описание электродинамических процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

дополненную материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (1.2)$$

где \vec{H} - вектор напряженности магнитного поля; \vec{E} - вектор напряженности электрического поля; \vec{B} - вектор индукции магнитного поля; \vec{D} - вектор электрической индукции; \vec{j} - вектор плотности токов проводимости; ρ - объемная плотность электрических зарядов; ϵ - диэлектрическая проницаемость; μ - магнитная проницаемость; γ - удельная электрическая проводимость.

Можно показать, что при анализе процессов в устройствах обработки металлических изделий можно пренебречь плотностью токов смещения $\partial \vec{D} / \partial t$. Система уравнений (1.1) упрощается также вследствие отсутствия в индукторной системе объемных электрических зарядов ($\rho = 0$).

При исследовании осесимметричных индукторных систем решение системы уравнений (1.1), (1.2) осуществляется в терминах векторного магнитного потенциала A , который вводится соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (1.3)$$

и имеет одну окружную составляющую $\vec{A}(r, z, t)$.

Из уравнений (1.1)-(1.3) с учетом сделанных упрощений можно получить уравнение в частных производных, описывающее пространственное и временное распределение электромагнитного поля

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} r A \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \gamma E_0 \quad (1.4)$$

где E_0 - напряженность стороннего электрического поля, создаваемого генератором установки.

Уравнение (1.4) решается при следующих граничных условиях: $\partial A / \partial z = 0$ в плоскости симметрии; $A = 0$ при $r = 0$, на достаточно удаленной от индуктора границе Γ (фиг.1)

$$\frac{\partial A}{\partial n} = \alpha_A (A - A_0)$$

где n - нормаль к границе Γ ; α_A - штрафной множитель; A_0 - заданное распределение векторного магнитного потенциала вдоль границы Γ . В качестве последнего может быть использовано, например, известное аналитическое решение для соленоида на достаточно больших расстояниях от его центра [6]. Такие смягченные граничные условия принимать предпочтительнее, чем полагать $A = 0$ или использовать точно вычисленные значения A_0 . Следует отметить, что влияние погрешности граничных условий на удаленной границе незначительно.

Уравнение (1.4) с приведенными выше граничными условиями решается МКЭ при использовании простейшего элемента в виде произвольного четырехугольника с узлами в вершинах с пятилинейной аппроксимацией потенциальной функции [5].

Решение уравнения (1.4) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{1}{\mu r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + 2\gamma A \frac{\partial A}{\partial t} - 2\gamma A E_0 \right] r ds + \int_L \alpha_A \left(\frac{A}{2} - A_0 \right) r dL \quad (1.5)$$

в произвольный момент времени.

Применяя к функционалу (1.5) известную процедуру МКЭ [5], получаем систему разрешающих уравнений для одних элементов, из которых формируем систему для всей расчетной области. При этом для решения нестационарной задачи электродинамики используется неявная конечно-разностная схема Крэнка-Николсона

$$\frac{\partial A(t + \Delta t)}{\partial t} = [A(t + \Delta t) - A(t)] \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial A(t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

где Δt - величина шага по времени.

Неявная конечно-разностная схема (1.6) является абсолютно устойчивой и обеспечивает квадратичный закон изменения решения в пределах временного шага.

Полученная система разрешающих уравнений в общем случае является существенно нелинейной, так как магнитная проницаемость μ ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля H . При выполнении численных расчетов реализована кусочно-линейная аппроксимация основной кривой намагничивания $B(H)$, обеспечивающая требуемую точность описания магнитных свойств материалов. Для учета зависимости магнитной проницаемости от температуры используется аппроксимация:

$$\mu(H, T) = \mu_0 + \mu(H) - \mu_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_k} \right)^m \right], \quad T \leq T_k,$$

$$\mu = \mu_0, \quad T \geq T_k$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума, T_k - температура точки Кюри ферромагнетика, $m = 2,4$

Для решения нелинейной задачи электродинамики используется эффективный итерационный процесс, заключающийся в уточнении магнитной проницаемости в каждом узле интегрирования. Для ускорения сходимости итерационного процесса n -е приближение для магнитной проницаемости представляется в виде

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n-1}} \alpha + \frac{H_{n-1}}{B_{n-1}} (1 - \alpha) \quad (1.7)$$

где α - коэффициент демпфирования итерационного процесса. Выполненные численные эксперименты показали, что оптимальная величина коэффициента α в формуле (1.7) находится в пределах 0,5-0,75. Указанный итерационный процесс выполняется на каждом временном шаге нелинейной нестационарной задачи электродинамики.

Рассмотрим процесс контактной точечной сварки с использованием сварочной машины переменного тока [4]. Расчетная область для задачи моделирования электрического поля представляет собой сплошное неоднородное цилиндрическое пространство (фиг.2), включающее электрод 1, деталь 2, диэлектрические под области (воздух) 3, под области контакта электрод-деталь 5.

Задача расчета электрического поля сводится к получению пространственного распределения амплитудного значения потенциала $U(r, z)$.

Из уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0$$

с учетом соотношений

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U$$

легко получить уравнение, описывающее распределение $U(r,z)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \gamma \right) + \frac{1}{r} \gamma \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) должно быть решено при следующих граничных условиях (фиг.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r_1} = 0, \\ U \Big|_{r_2} = U_m \Big|_{r_2}, \quad U \Big|_{r_3} = \frac{1}{2} U_m \Big|_{r_3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где U_m - амплитудное значение разности потенциалов между электродами.

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.9) является необходимым условием локального экстремума функционала

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \int_S \left[\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \quad (1.10)$$

Применяя к функционалу (1.10) процедуру МКЭ [5] получаем систему разрешающих уравнений для одного элемента и формируем систему для всей расчетной области.

2. Исследование тепловых процессов

Распределение температуры в рассматриваемых рабочих узлах электротехнологического оборудования описывается нестационарным уравнением теплопроводности

$$\varphi \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_r \frac{\partial T}{\partial r} + r k_{rz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{rz} \frac{\partial T}{\partial r} + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q \quad (2.1)$$

где c - объемная теплоемкость материала; ρ - плотность; k_r, k_z, k_{rz} - компоненты тензора теплопроводности анизотропного материала; Q - мощность внутренних источников тепла.

Пространственное и, в общем случае, временное распределение величины Q определяется по результатам расчета электрических и магнитных полей.

После расчета распределения электромагнитного поля в индукторной системе определяется плотность тока в проводящих подобластях конструкции:

$$\delta(t) = \gamma \left(E_0(t) - \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad - \text{ в индукторе}$$

$$\delta(t) = -\gamma \frac{\partial A}{\partial t} \quad - \text{ в заготовке} \quad (2.2)$$

Далее определяется величина

$$Q = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.3)$$

в каждом узле проводящих подобластей на всех временных шагах нестационарной задачи электродинамики.

При моделировании процесса обработки заготовки серией коротких затухающих импульсов магнитного поля вычисляется усредненная по периоду следования импульсов $T_{им}$ величина

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{T_{им}} \int_0^{T_{им}} Q dt \quad (2.4)$$

При исследовании процесса контактной сварки после решения уравнения

(1.8) рассчитываются распределения величин

$$\delta = \gamma \vec{E}, \quad \vec{E} = -\nabla U \quad Q_m = \frac{1}{\gamma} \delta^2 \quad (2.5)$$

где Q_m — максимальная мощность внутренних источников тепла. Усредняя величину

$$Q(r, z, t) = Q_m(r, z) \sin^2(\omega t + \beta)$$

по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega$, получаем величину

$$Q_{\text{ср}} = \frac{1}{2} Q_m \quad (2.6)$$

которая подставляется в уравнение (2.1).

Обработываемые изделия, индукторы и электроды находятся в сложных условиях теплообмена. Уравнение (2.1) в общем случае должно быть решено с граничными условиями 1-го, 2-го или 3-го рода и с учетом теплообмена излучением по закону Стефана-Больцмана. Красная задача сводится к линейаризованному функциональному уравнению [7], которое решается в соответствии с процедурой МКЭ [5,7]

3. Задача термоупругопластичности

Задача термоупругопластичности решается с учетом геометрической нелинейности и истории нагружения на той же конечно-элементной сетке, что и задача теплопроводности. В общем случае, рассматриваются анизотропные объекты сложной конфигурации с учетом объемного и поверхностного силового, а также температурного нагружения.

Для определения напряженно-деформированного состояния в конце шага используется линейаризованное вариационное уравнение Лагранжа в приращениях

$$\begin{aligned} \int_S (\Delta \sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} + {}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \gamma_{\alpha\beta} - \Delta P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dS - \int_L \Delta P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha} r dL \\ + \int_S ({}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta} \delta \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} - {}^{(1)}P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dS - \int_L ({}^{(1)}P^{\alpha} \delta \Delta u_{\alpha}) r dL = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где S, L — площадь меридионального сечения и его граница в исходном (недеформированном) состоянии S_0 ; ${}^{(1)}\sigma^{\alpha\beta}$, $\Delta \sigma_{ij}$ — компоненты полного тензора и тензора приращений напряжений Пиза, отнесенные к размерам объемного элемента до деформаций; ${}^{(1)}P^{\alpha}$, ΔP^{α} — компоненты объемной нагрузки в начале шага (состояние S_1) и на шаге приращения, ${}^{(1)}P^{\alpha}$, ΔP^{α} — компоненты поверхностной нагрузки в состоянии S_1 и на шаге приращения; Δu_{α} — компоненты приращения перемещений.

Повд сторонние силы, необходимые для решения уравнения (3.1), рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2, \quad \vec{T}_1 = \vec{\sigma} : \vec{B}, \\ \vec{T}_2 = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{T}_2 \text{rad} \vec{B}], \quad \vec{T} = \vec{B} \cdot \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (3.2)$$

При решении уравнения (3.1) параметры начала шага считаются известными. Физические соотношения предполагают представление тензора приращений деформаций в виде суммы приращений упругой, температурной и пластической деформаций:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^T + \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (3.3)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(2)} \Delta \sigma_{km} + \Delta \lambda_{ijkm} \sigma_{km} \quad (3.4)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} \alpha_1 \sigma_T - \varepsilon_{ij}^{(2)} \alpha_2 \sigma_T, \quad \Delta \varepsilon_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \quad (3.5)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{ij}} \right)^2 \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) \varepsilon_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \Delta \sigma_{km} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{ij}} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) (\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}) \quad (3.6)$$

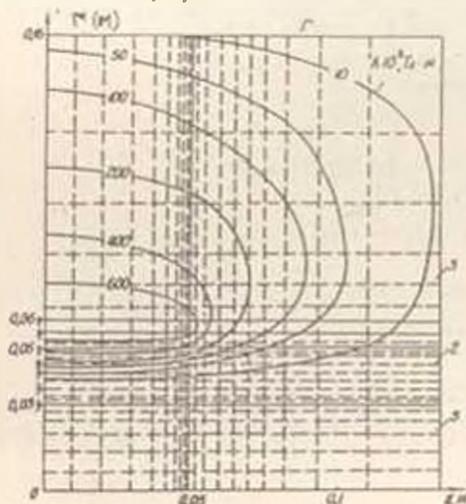
где $\Delta \lambda_{ijkm} = \varepsilon_{ij}^{(2)} \lambda_{ijkm} - \varepsilon_{ij}^{(1)} \lambda_{ijkm}$ приращение коэффициента закона Гука вследствие изменения температуры на шаг; $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}$ модуль Юнга и касательный модуль к диаграмме деформирования изотропного материала в начале шага при температуре α_1, α_2 ; $\varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$ коэффициенты линейного температурного расширения; S_{ij} дивизор напряжений; σ_{ij} интенсивность напряжений; σ_T предел текучести, соответствующий началу шага. Лямбда верхние индексы в круглых скобках 1 и 2 означают, что величина относится к началу и к концу временного шага соответственно.

При решении задачи используется теория типа течения с изотропным упрочнением [7] в соответствии с которой приращения компонент пластической деформации вычисляются по формуле (3.6). Данная теория удовлетворительно описывает поведение материала при деформациях до нескольких процентов в случае активного нагружения и упругой разгрузки.

Применяя процедуру МКЭ к управлению (3.1) с учетом (3.3)-(3.6), получаем систему алгебраических уравнений, решение которой определяет значения вектора приращений смещений Δu_i на временном шаге. Результирующее решение получается накоплением величин $\Delta u_i, \Delta \sigma^k, \Delta \varepsilon_{ij}$ от шага к шагу. Перемещения вычисляются в узлах конечных элементов, а деформации и напряжения - в центрах конечных элементов, где они имеют наибольшую точность.

4. Алгоритм анализа связанных физико-механических полей

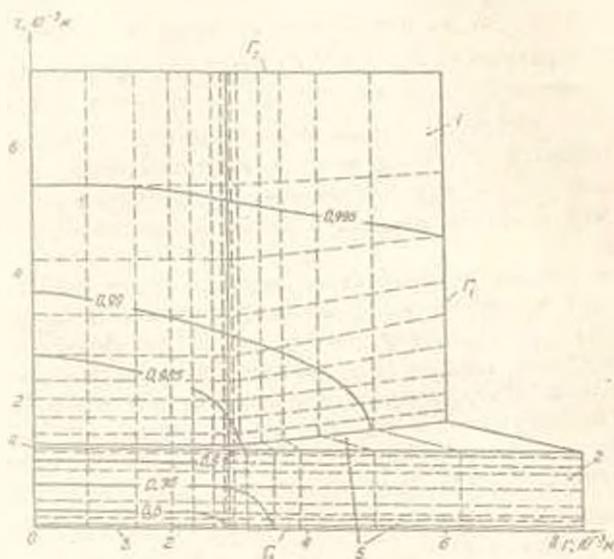
Для решения связанной задачи реализован специальный итерационный процесс, заключающийся в многократном расчете магнитного (электрического), температурного и механического полей. При этом, на каждой итерации функционал (1.5) или (1.10) минимизируется с учетом распределения температуры, полученного на предыдущей итерации. Это позволяет учесть влияние температурного поля на магнитное (электрическое) поле путем учета температурной зависимости электрофизических свойств материалов.



фиг. 1

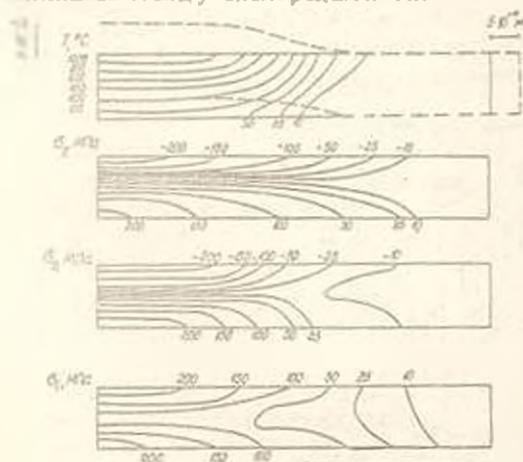
Описание методики решения задач механики электромагнитных сплошных сред реализована в виде программного комплекса на ЭВМ Единой серии. Выявлено исследование ряда реальных технологических процессов. Некоторые из полученных результатов можно проиллюстрировать фиг.1-4.

На фиг.1 представлена индукторная система установки для термобработки металлов серией затухающих синусоидальных импульсов магнитного поля, представлена разбивка на конечные элементы. Индуктор 1 выполнен из меди, заготовка 2 - из стали 12Х18Н10Т. Сила тока в индукторе - 111,6 кА, частота модуляции - 8 кГц. На фиг.1 показаны изолинии векторного магнитного потенциала в момент времени 37,5 мкс.



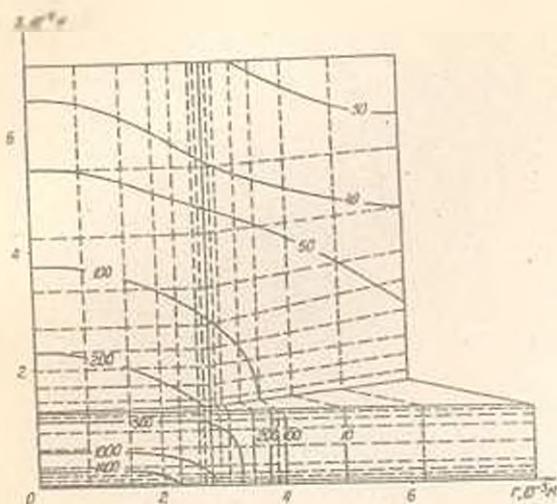
фиг. 2

На фиг.2 показана расчетная область задачи о точечной сварке, разбивка на конечные элементы и изолинии амплитудного значения потенциала Φ . Индуктор 1 изготовлен из меди, деталь 2 - из стали 12Х12Н10Т. Разность потенциалов между электродами 1В.



фиг.3

На фиг.3 представлены изотермы, линии равного уровня напряжений в заготовке, а также деформированное состояние последней через 9 с после начала обработки.



Фиг.4 иллюстрирует изотермы для момента выключения сварочного тока (0,128 с.).

Разработанные методики и программное обеспечение позволяют определять рациональные режимы ведения технологических процессов и конструктивные решения оборудования без использования дорогостоящего натурального эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувалдин А. Б. Индукционный нагрев ферромагнитной стали. - М.: Энергоатомиздат, 1986. 200 с.
2. Белый И. В., Фертик С. М., Хименко И. Т. Справочник по магнитоимпульсной обработке металлов. - Харьков: Вицашкола, 1977. 168 с.
3. Капленко И. В., Матвейчук В. А. Индукционная технология соединений деталей и машин // Первый Всесоюзный Съезд технологов-машинистов: Тезисы докладов. - М.: Внешторгиздат, 1989, с. 69.
4. Технологии и оборудование контактной сварки / Под редакцией Б. Д. Орлова. - М.: Машиностроение, 1975. 536 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 541 с.
6. Шнейерсон Г. А. Поля переходных процессов в аппаратуре сверхсильных токов. - Л.: Энергия, 1981. 200 с. 7. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. - Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.

Институт проблем машиностроения АН Украины
Поступила в редакцию 21.04.1992 г.