



$D_{11} = B_{11}h^3/12$  - цилиндрическая жесткость полосы, а  $B_{11}$  и  $B_{55}$  выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [1]

Теория же [2] позволяет условие  $u_x = 0$  удовлетворить во всех точках заземленного сечения полосы, в силу чего она приводит к одному решению

$$w_2 = -\frac{qx(l-x)}{24D_{11}} \left[ x(l-x) + \frac{3B_{11}h^2}{2B_{55}} \right] \quad (1.3)$$

$$M_2 = -\frac{ql}{12} [ 6x^2 - 6lx + l^2 ] \quad (1.4)$$

б) Сторона полосы  $x = 0$  заземлена, а сторона  $x = l$  свободна и несет нагрузку интенсивности  $Q$ . Из [1] имеем

$$w_1 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[ x(3l-x) + \frac{1}{2} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} \left( \frac{3}{2} - \frac{2x}{h} \right) \right] \quad (1.5)$$

Решение же по теории [2] имеет вид

$$w_2 = \frac{Qx}{6D_{11}} \left[ x(3l-x) + \frac{3}{4} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} \right] \quad (1.6)$$

в) Полоса шарнирно оперта вдоль длинных сторон и несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$ . В этом случае к единственному решению приводит и теория [1]

$$w_1 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[ x^3 - 2lx^2 + l^2 + \frac{6}{5} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} (l-x) \right] \quad (1.7)$$

Решение теории [2] имеет вид

$$w_2 = -\frac{qx}{24D_{11}} \left[ x^3 - 2lx^2 + l^2 + \frac{3}{2} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}} (l-x) \right] \quad (1.8)$$

Отметим, что для случаев б) и в) не имеет смысла привести выражения изгибающего момента, поскольку из-за статической определенности задач они по обеим теориям совпадают.

Решения (1.1)-(1.8) приводят к следующим заключениям:

1. Поправки к классическим значениям прогибов теории [1], полученные при удовлетворении условиям заделки  $u_x = 0$  в точках срединной плоскости полосы  $z_0 = 0$ , совпадают с соответствующими поправками теории [2]. В остальных же случаях поправки теории [2] получаются незначительно большими.

2. Теория [1] при статической неопределенности задачи (случай а) приводит к ничтожно малым поправкам изгибающего момента. Причем эти поправки в зависимости от положения точек закрепления (значения  $z_0$ ) имеют разные знаки: при  $z_0 > h\sqrt{3/20}$  они положительны, при  $z_0 < h\sqrt{3/20}$  отрицательны, а при  $z_0 = h\sqrt{3/20}$  превращаются в нуль.

Теория же [2] для изгибающего момента полосы поправок не дает. Очевидно, что появление незначительных поправок нестабильного знака для изгибающего момента по теории [1] является следствием того, что в рамках этой теории выражения основных напряжений пластинки содержат члены, кубические по поперечной координате  $z$ .

Таким образом, для рассмотренных полос постоянной толщины решения задач по двум уточненным теориям [1] и [2] в количественном смысле существенно не отличаются друг от друга.

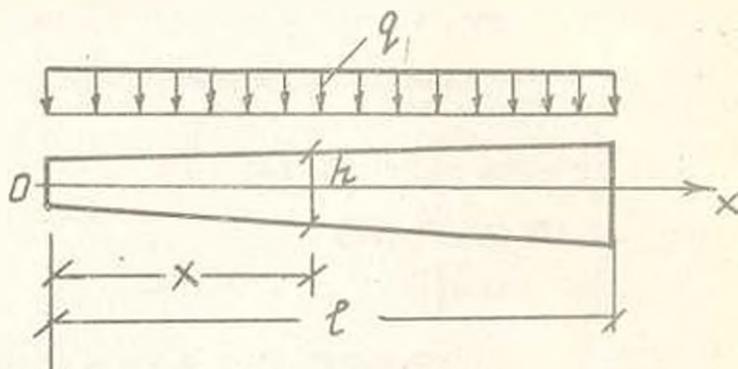
И. Рассмотрим ортогонную полосу ширины  $L$ , толщина которой  $h$  вдоль длины постоянна, а по ширине меняется линейно (фиг.1). Полоса несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$ , приведенной к единице

площади срединной плоскости.

Пусть

$$h = h_0 + h_1 x \quad (2.1)$$

где  $h_0$  и  $h_1$  - постоянные. Полагая, что условия крепления сторон  $x=0$ ,  $x=l$  по длине не меняются, можно считать, что все расчетные величины от продольной координаты  $x$  не зависят и полоса деформируется по цилиндрической поверхности.



Фиг.1.

Переходим к безразмерным величинам:

$$h = h_0 t, \quad u = h_0 \bar{u}, \quad v = h_0 \bar{v}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad q = B_{11} \bar{q},$$

$$\varphi = B_{11} \bar{\varphi}, \quad \psi_1 = B_{11} \bar{\psi}_1, \quad \varphi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\varphi}_2, \quad \psi_2 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\psi}_2,$$

$$\varphi_3 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\varphi}_3, \quad \psi_3 = \frac{B_{11}}{h_0} \bar{\psi}_3, \quad T_x = B_{11} h_0 \bar{T}_x, \quad T_y = B_{11} h_0 \bar{T}_y,$$

$$S = B_{11} h_0 \bar{S}, \quad N_x = B_{11} h_0 \bar{N}_x, \quad N_y = B_{11} h_0 \bar{N}_y,$$

$$M_x = B_{11} h_0^2 \bar{M}_x, \quad M_y = B_{11} h_0^2 \bar{M}_y, \quad H = B_{11} h_0^2 \bar{H} \quad (2.2)$$

Здесь  $t$  - безразмерная координата,  $w$  - прогиб,  $u, v$  - тангенциальные перемещения срединной плоскости,  $T_x, T_y, S, N_x, N_y$  и  $M_x, M_y, H$  - внутренние усилия и моменты полосы. Черточкой наверху обозначены безразмерные значения соответствующих величин.

На основе уточненной теории пластинок переменной толщины [2] с учетом обозначений (2.2) для плоской задачи и задачи изгиба полосы имеем:

а) плоская задача

$$\frac{d}{dt} \left( t \frac{d\bar{u}}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( t \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{h_1^2}{t} \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \psi_2 = \frac{B_{66} h_1^2}{B_{11} t} \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (2.4)$$

$$\bar{T}_x = h_1 t \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \bar{T}_y = \frac{B_{11}}{B_{11}} \bar{T}_y, \quad \bar{S} = \frac{B_{66} h_1 t}{B_{11}} \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.5)$$

б) задача изгиба

$$t \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + 2\bar{\varphi} = -\frac{3\bar{q}}{2h_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} \right) - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{1}{h_1} \left( r^2 \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) + \frac{8\bar{\varphi}}{h_1^3} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right) - \frac{8B_{44}}{B_{66}} \frac{1}{h_1} \bar{\psi}_1 = 0$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{1}{r^2} \left[ 4\bar{\psi}_1 + h_1 r \left( h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right) \right]$$

$$\bar{\psi}_3 = -\frac{1}{r^2} \left( 4\bar{\psi}_1 + h_1 r \frac{B_{66}}{B_{44}} \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right)$$

$$\bar{N}_x = \frac{t}{12} (12\bar{\varphi} + r^2 \bar{\psi}_3), \quad \bar{N}_y = \frac{t}{12} (12\bar{\psi}_1 + r^2 \bar{\psi}_3)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{h_1 r^3}{12} \left( h_1 \frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66}}{12B_{44}} h_1 r^3 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt}$$

Решения этих задач имеют вид:

а) плоская задача

$$\bar{u} = C_1 \ln t + C_2, \quad \bar{v} = C_3 \ln t + C_4$$

$$\bar{\varphi}_2 = h_1 r \frac{C_1}{r^2}, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{B_{66} h_1^2 C_3}{B_{11} r^2}, \quad \bar{T}_x = h_1 C_1,$$

$$\bar{T}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} h_1 C_1, \quad \bar{S} = \frac{B_{66}}{B_{11}} h_1 C_3$$

б) задача изгиба

$$\bar{\varphi} = C_5 \frac{1}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{4h_1}$$

$$\bar{w} = \frac{6\bar{q}}{h_1^3} r (\ln t - 1) + \frac{C_5}{h_1} \left( \frac{4}{h_1 r} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) \frac{1}{t} + C_6 \ln t + C_7 t + C_8$$

$$\bar{\psi}_1 = C_9 r^{n_1} + C_{10} r^{n_2}, \quad n_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{32B_{44}}{h_1 B_{11}}}$$

$$\bar{\varphi}_3 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{C_6 h_1^3}{t} - 12 \frac{C_5}{r^2} - \frac{3\bar{q}}{h_1} \right)$$

$$\bar{\psi}_3 = C_9 \left( \frac{B_{66} h_1^2 n_1 - 4}{B_{44}} \right) r^{n_1+2} + C_{10} \left( \frac{B_{66} h_1^2 n_2 - 4}{B_{44}} \right) r^{n_2+2}$$

$$\bar{M}_x = \frac{h_1 r^2}{12} \left( \frac{8C_5}{h_1 r^2} + \frac{6\bar{q}}{h_1^3} - \frac{C_6 h_1}{t} \right), \quad \bar{M}_y = \frac{B_{12}}{B_{11}} \bar{M}_x,$$

$$\bar{H} = \frac{B_{66} h_1}{12B_{44}} (C_9 n_1 r^{n_1+2} + C_{10} n_2 r^{n_2+2})$$

Постоянные интегрирования  $C_i$  подлежат определению из граничных

на краях полосы  $x=0, x=l$ .

3. Пусть полоса жестко заделана вдоль сторон  $x=0, x=l$ . Граничные условия в этом случае принимают вид:

$$\text{при } t_1 = 1 \text{ и } t_1 = 1 + \frac{h_1 l}{h_0} \\ \bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{w} = 0, \quad -h_1 \frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{B_{11}}{B_{55}} \bar{\varphi} = 0, \quad \bar{\psi}_1 = 0 \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) и (2.13) нетрудно убедиться, что в данном случае плоская задача имеет тривиальное решение

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\psi}_2 = 0, \quad \bar{T}_x = \bar{T}_y = \bar{S} = 0 \quad (3.3)$$

Удовлетворив последним условиям (3.2) с учетом (2.17), находим

$$C_9 + C_{10} = 0 \\ C_9 t_1^2 + C_{10} t_1^2 = 0 \quad (3.4)$$

Поскольку определитель этой системы отличен от нуля, то

$$C_9 = C_{10} = 0 \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$\psi_1 = 0 \quad (3.6)$$

С учетом (2.15) и (2.16) первые два условия (3.2) принимают вид:

$$\frac{4}{h_1^2 t_i} C_5 - \frac{h_1}{t_i} C_6 - h_1 C_7 = \frac{\bar{q}}{h_1} \left( \frac{6 \ln t_i}{h_1^2} + \frac{3 B_{11}}{4 B_{55}} \right), \\ \frac{1}{h_1 t_i} \left( \frac{4}{h_1^2} - \frac{B_{11}}{B_{55}} \right) C_5 + \ln t_i C_6 + t_i C_7 + C_8 \\ = \frac{6 \bar{q}}{h_1^2} t_i (1 - \ln t_i), \quad (i = 1, 2) \quad (3.7)$$

Это и есть система алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования  $C_5 - C_8$ .

С целью сравнения приведем решение рассматриваемой задачи еще и в рамках классической теории пластинок, не учитывающей влияния поперечных сдвигов. Эти решения имеют вид:

$$\bar{u}^0 = \bar{v}^0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\bar{w}^0 = \frac{6 \bar{q}}{h_1^3} t (\ln t - 1) + \frac{12 C_9^0}{h_1^3} \ln t - \frac{6 C_9^0}{h_1^3} \frac{1}{t} + C_9^0 t + C_9^0$$

$$\bar{M}_x^0 = -\frac{6 \bar{q} t^2}{2 h_1^3} + C_9^0 t + C_9^0 \quad (3.9)$$

Постоянные интегрирования  $C_9^0$  определяются из граничных условий, которые приводятся к системе

$$\frac{12}{h_1^3 t_i} C_9^0 + \frac{6}{h_1^3 t_i^2} C_9^0 + C_9^0 = -\frac{6 \bar{q}}{h_1^3} \ln t_i$$

$$\frac{12}{h_1^3} \ln_i C_1^0 - \frac{6}{h_1^2} C_2^0 + C_3^0 + C_4^0 = \frac{6\sigma}{h_1} \epsilon_i (1 - \ln_i), \quad (i = 1, 2) \quad (3.10)$$

4. Пусть

$$h_0/l = 0,05, \quad \bar{\nu} = 10^3 \quad (4.1)$$

Будем рассматривать случай ортотропной и изотропной полос, защемленных вдоль длинных сторон. Для материала ортотропной полосы положим:

$$\begin{aligned} E_2 = 0,5E_1, \quad E_3 = 0,2E_1, \quad \nu_{12} = 0,3, \quad \nu_{23} = 0,5\nu_{12}, \\ \nu_{31} = 0,5\nu_{12}, \quad G_{12} = 0,2E_1, \quad G_{13} = 0,1E_1, \quad G_{21} = 0,2E_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть материал изотропной полосы характеризуется модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$

Пользуясь общеизвестными формулами [1] вычислим отношение  $B_{11}/B_{55}$ . Для рассмотренных случаев оно принимает значение:

$$\begin{aligned} \text{для ортотропной полосы} - 12,195 \\ \text{для изотропной} - 2,857 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таблица 2

Классическая теория

$h_1$	$\bar{M}_1 \times 10^3$	$\bar{x}_M$	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	$\bar{x}_w$	$w_{\max}$
0,05	-21,18	0,43	16,05	-48,60	0,43	1,64
0,10	-15,66	0,39	15,16	-58,63	0,38	0,78
0,15	-12,46	0,37	14,36	-69,98	0,35	0,45
0,20	-10,36	0,34	13,66	-71,75	0,33	0,29
0,25	-8,85	0,33	13,04	-81,90	0,31	0,20

Уточненная теория (изотропная полоса)

$h_1$	$\bar{M}_1 \times 10^3$	$\bar{x}_M$	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	$\bar{x}_w$	$w_{\max}$
0,05	-21,23	0,43	16,06	-48,49	0,43	1,77
0,10	-15,73	0,39	15,20	-58,41	0,37	0,89
0,15	-12,56	0,37	14,44	-65,58	0,35	0,54
0,20	-10,48	0,35	13,80	-71,10	0,33	0,37
0,25	-9,01	0,33	13,26	-73,88	0,31	0,27

Уточненная теория (ортотропная полоса)

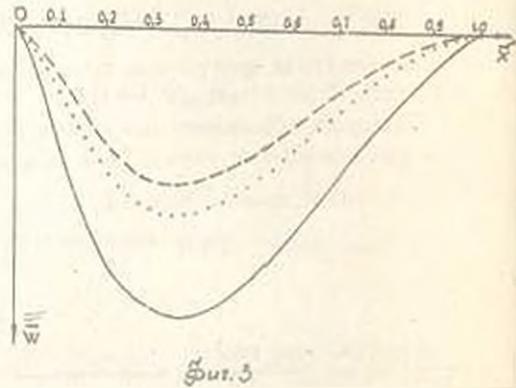
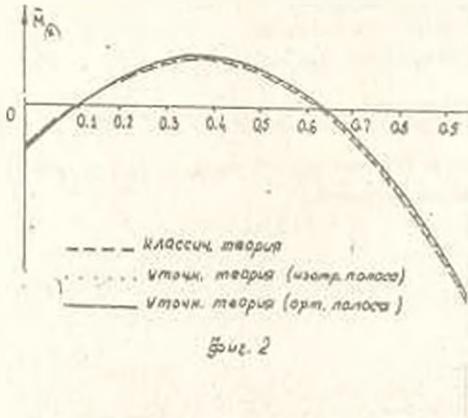
$h_1$	$\bar{M}_1 \times 10^3$	$\bar{x}_M$	$\bar{M}_2 \times 10^3$	$\bar{M}_3 \times 10^3$	$\bar{x}_w$	$w_{\max}$
0,05	-21,35	0,43	16,10	-48,26	0,42	2,56
0,10	-15,93	0,39	15,31	-57,83	0,38	1,26
0,15	-12,83	0,37	14,66	-64,52	0,35	0,85
0,20	-10,81	0,35	14,16	-70,78	0,32	0,63
0,25	-9,38	0,34	13,77	-73,28	0,31	0,49

В табл.2 представлены безразмерные значения некоторых расчетных величин изотропной и ортотропной полос различных переменных толщин, полученные на основе классической и уточненной теории пластинок. При этом через  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_3$  обозначены опорные моменты, а через  $\bar{M}_2$  экстремум изгибающего момента, который возникает в сечении с координатой  $\bar{x}_M$ . Как и следовало ожидать, наибольший изгибающий момент получается на толстом краю полосы

$$\bar{x} = 1.$$

В последнем столбце табл.2 приведены безразмерные значения максимального прогиба  $\bar{w}_{max}$  получаемых в сечениях полосы  $\bar{x}_m$ . На фиг.2 и 3 построены графики изгибающих моментов и прогибов полосы при  $h_1 = 0,15$ .

Из этих графиков видно, что изгибающие моменты полосы по классической и уточненной теориям, как и следовало ожидать, практически совпадают. Поправка, вносимая уточненной теорией, заметна лишь для прогибов полосы.



В зависимости от характера анизотропии она может оказаться весьма существенной. Например, поправка к максимальному значению прогибов изотропной полосы составляет примерно 20% а для рассматриваемой ортотропной полосы она доходит до 85%.

Таблица 3  $\tau_{xz}/B_{11} \times 10^3$

$z/h$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0$	$\bar{x} = 0,367$	$\bar{x} = 0,373$	$\bar{x} = 1$	$\bar{x} = 1$
	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.	изотр.	ортотр.
0	13,85	14,01	-0,73	-0,77	-3,82	-3,81
0,05	13,66	13,81	-0,70	-0,75	-3,80	-3,79
0,10	13,07	13,22	-0,64	-0,68	-3,74	-3,73
0,15	12,09	12,23	-0,53	-0,57	-3,64	-3,63
0,20	10,73	10,84	-0,37	-0,41	-3,51	-3,49
0,25	08,97	09,06	-0,18	-0,21	-3,33	-3,31
0,30	06,83	06,89	0,07	0,04	-3,11	-3,09
0,35	04,29	04,32	0,35	0,33	-2,85	-2,83
0,40	01,37	01,35	0,68	0,66	-2,56	-2,53
0,45	-01,95	-02,01	1,06	1,04	-2,22	-2,19
0,50	-05,65	-05,77	1,47	1,47	-1,84	-1,81

Таблица 4  $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$ 

$h_1$	изотр.	ортотр.
0,05	8,67	8,78
0,06	8,22	8,25
0,07	7,76	7,79
0,08	7,35	7,39
0,09	6,99	7,03
0,10	6,67	6,67
0,11	6,37	6,42
0,12	6,11	6,15
0,13	5,87	5,91
0,14	5,65	5,70
0,15	5,44	5,49
0,16	5,25	5,31
0,17	5,08	5,13
0,18	4,92	4,97
0,19	4,77	4,82
0,20	4,62	4,68
0,21	4,49	4,55
0,22	4,37	4,43
0,23	4,25	4,31
0,24	4,14	4,20
0,25	4,04	4,10

В табл.3 приведены значения безразмерного касательного напряжения  $\tau_{\max} = \tau_{\max}/\delta_{11}$  в опорных сечениях  $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$  и в сечении максималь

В табл.4 представлены отношения максимальных значений нормальных значений нормального и касательного напряжения. Оба эти напряжения свои наибольшие значения принимают в тонком сечении полосы  $\bar{x} = 0$ . Причем, наибольшее нормальное напряжение получается в крайних точках, а наибольшее касательное напряжение - в середине этого сечения. Как видно из данных табл.4, с увеличением толщины (параметра  $h_1$ ) отношение  $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$  убывает. В рассмотренных пределах изменения  $h_1$  оно доходит до 4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1987. - 360 с.
2. Киракосян Р. М. Обобщенной теории анизотропных пластин переменной толщины. - Изв. АН РА. Механика, 1991. т. 44, №3.

Институт механики АН Армении  
Поступила в редакцию 8.07.1992