К ОСНОВАНИЮ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ
ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ՏԵՐԱՆՅԱՆ Ս. Ս.

Անյրաճյաճ Ա. Գ., Օնրտաճոր, օրթոտրոպ զյաճալիճ թաղաճրի տատաճումճերի և կայունճության խճղիճերի յունճաճ մի եղաճակի Քիմճաճորմաճ մասիճ:

Sevranian S. L. On the foundation of one method of solution of stability and vibration problems for layered orthotropic cylindrical shell

Հետազոտճում է ճկուն, շիրտաճոր, օրթոտրոպ, կյոր զյաճալիճ թաղաճրի սեճակաճ տատաճումճերը և ստատիկ կայունճությունճը, սկզբճակաճ մաճնճտալիճ առաճըքաաիմետրիկ հաճաաարակշիռ ճիճակի դեաճուճ ճկարազորող, զճալիճ համաեռ հաճրաաաշճակաճ հաճաաարումճերի աճճերը համակարգը:

Исследуется бесконечная линейная однородная алгебраическая система уравнений, описывающая собственные колебания и статическую устойчивость гибкой слоистой ортотропной круговой цилиндрической оболочки при моментном начальном осесимметричном состоянии равновесия и шарнирном опирании торцов.

В работах [1-3] решаются задачи о статической устойчивости и собственных колебаниях слоистой ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки в предположениях гибкости и моментности начального осесимметричного состояния равновесия и шарнирного опирания торцов. Исходные задачи представляем известными тригонометрическими рядами приводятся к бесконечной однородной системе алгебраических уравнений и детерминантному уравнению. В работах [4-6] граничные условия предполагаются произвольными, а преобразование краевых задач производится с применением методов разделения переменных и конечных разностей. Как отмечено в [3], численный метод, предложенный в [2], эффективен по быстродействию метода в [4,5] в 12 раз.

В настоящей работе обосновывается метод, предложенный в [2,3].
1. Исследуется бесконечная система уравнений [1,3]

$$(V_q - 2S_0 + S_{2q})a_q + \sum_{m=1}^{q-1} (S_{m+q} - S_{q-m})a_m$$

$$+\sum_{m=q+1}^n (S_{mq} - S_{m-q}) a_m = 0, \quad q=1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Здесь

$$V_q = 2R a_{11} \frac{\Phi_{2q} \Phi_{1q} - P \lambda_0^2 - \mu \Omega_n^2 + (\Phi_{3q} - \frac{\lambda_0^2}{R})^2}{\mu_n^2 \Phi_{2q}}$$

$$S_0 = f_0$$

$$S_{2q} = [1 - R a_{11} \lambda_0^2 (\frac{P_{11}}{a_{11}} + 2 \frac{\Phi_{3q} - \frac{\lambda_0^2}{R}}{\Phi_{2q}})] f_{2q} \quad (1.2)$$

$$S_{2l} = [1 - R a_{11} \lambda_0^2 (\frac{P_{11}}{a_{11}} + \frac{\Phi_{3m} - \frac{\lambda_0^2}{R}}{\Phi_{2m}}) + \frac{\Phi_{3q} - \frac{\lambda_0^2}{R}}{\Phi_{2q}}] f_l, \quad l = q-m, q+m, m-q$$

где

$$\Phi_{1q} = (D_{11} - D_{11}^0) \lambda_q^4 + (D_{22} - D_{22}^0) \mu_n^4$$

$$+ 2 [D_{12} - D_{12}^0 + 2(D_{66} - D_{66}^0)] \lambda_q^2 \mu_n^4$$

$$\Phi_{2q} = a_{11} \lambda_q^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda_q^2 \mu_n^2 + a_{22} \mu_n^4$$

$$\Phi_{3q} = P_{11} \lambda_q^4 + (P_{12} + P_{21} - 2P_{66}) \lambda_q^2 \mu_n^2 + P_{22} \mu_n^4$$

$$\lambda_q = \frac{q\pi}{L}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{R} \quad (1.3)$$

L, R - длина и радиус оболочки, P, Ω_n - осевое сжатие и собственная частота колебаний, ρ - погонная плотность вдоль оси оболочки. Константы a_{ik}, P_{ik}, D_{ik}^0 выражаются через известные жесткости C_{ik}, K_{ik}, D_{ik} классической теории слоистых ортотропных оболочек [1, 7].

Величины f_k ($k=1, 2, \dots$) - коэффициенты разложения прогиба на-

чального состояния в промежутке $[0, L]$ в ряд Фурье по косинусам, f_0 - константа.

a_q - коэффициенты разложения вариации прогиба в ряд Фурье по синусам.

В предположениях о скорости сходимости коэффициентов Фурье f_k к нулю

$$|f_k| < \frac{C}{k^\alpha} \quad (1.4)$$

где C, α -- константы, $C > 0$, $\alpha > 1$, $k = 1, 2, \dots$ доказывается, что бесконечная система (1.1) преобразуется к эквивалентной системе, бесконечный детерминант которой удовлетворяет условиям Коха [8], откуда следует, что равенство его нулю есть необходимое и достаточное условие существования формы колебаний (при $\Omega_n = 0$ потери устойчивости) оболочки. Более того, решение бесконечной системы может быть получено методом редукции.

2. Условия Коха формулируются для бесконечного определителя матрицы A , представленной в форме

$$A = I + E \quad (2.1)$$

где I - единичная матрица, и требует сходимости рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}| < \infty \quad (2.2)$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \\ (i \neq j)}} |a_{ij}| < \infty \quad (2.3)$$

Преобразуем матрицу (1.1) к форме (2.1) таким образом, чтобы условия Коха выполнялись. С использованием (1.1)-(1.3) определяется порядок величин общего члена последовательности элементов матрицы главной диагонали

$$V_q - 2S_0 + S_{2q} = \frac{2R}{\mu_n} \lambda_q^4 [a_{11} (D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2] = \pm G^2 \lambda_q^4 \quad (2.4)$$

при $q \rightarrow \infty$, где введено обозначение

$$G^2 = \frac{2R}{\mu_n} |a_{11} (D_{11} - D_{11}^0) + P_{11}^2| \quad (2.5)$$

Далее выполняется деление каждой q -ой строки и m -го столбца на $G\lambda_q^2$ и $\pm G\lambda_m^2$ (знак плюс или минус выбирается, соответственно, (2.4)). Очевидно, такому преобразованию соответствует деление каждого q -го уравнения системы (1.1) на $G\lambda_q^2$ и замена неизвестных a_m на a_m' по формуле $a_m = \pm a_m'/G\lambda_m^2$. В результате выражения ϵ_{qq} элементов главной диагонали и ϵ_{mq} , при $m \neq q$, записываются в виде

$$\epsilon_{qq} = \pm \frac{V_q - 2S_0 + S_{2q}}{G^2\lambda_q^4} - 1 = \pm \frac{1}{G^2\lambda_q^4}(V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) \quad (2.6)$$

$$\epsilon_{mq} = \pm \frac{S_{m+q} - S_{|m-q|}}{G^2\lambda_m^2\lambda_q^2}, \quad m \neq q \quad (2.7)$$

3. Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= D_{11} - D_{11}^0, \quad A_2 = 2 [D_{12} - D_{12}^0 + 2(D_{66} - D_{66}^0)] \mu_n^2 - P \\ A_3 &= (D_{22} - D_{22}^0) \mu_n^4 - \rho \Omega_n^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$B_1 = (a_{66} - 2a_{12}) \mu_n^2, \quad B_2 = a_{22} \mu_n^4$$

$$C_1 = (P_{12} + P_{21} - 2P_{66}) \mu_n^2 - \frac{1}{R}, \quad C_2 = P_{22} \mu_n^4$$

и покажем существование конечного предела

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} (V_q - 2S_0 + S_{2q} \mp G^2\lambda_q^4) < \infty \quad (3.2)$$

откуда, очевидно, следует выполнение условия Коха (2.2).

Предварительно, с учетом (1.2), (1.3), (2.5), (3.1), определим предел отношения

$$\begin{aligned} & \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} (V_q \mp G^2\lambda_q^4) \\ &= \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} [2R a_{11} \frac{A_1 \lambda_q^4 + A_2 \lambda_q^2 + A_3}{\mu_n^2} - \\ & - \frac{2R a_{11} (P_{11} \lambda_q^4 + C_1 \lambda_q^2 + C_2)^2}{\mu_n^2 (a_{11} \lambda_q^4 + B_1 \lambda_q^2 + B_2)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2R\lambda_q^4}{\mu_n^2} (a_{11}A_1 + P_{11}^2) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} [2R a_{11} \frac{A_2\lambda_q^2 + A_3}{\mu_n^2} \\
& + \frac{(2P_{11}C_1 - \frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1)\lambda_q^6 + (C_1^2 + 2C_2P_{11} - \frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_2)\lambda_q^4}{a_{11}\lambda_q^4 + b_1\lambda_q^2 + B_2} \quad (3.3) \\
& + \frac{2C_1C_2\lambda_q^2 + C_2^2}{a_{11}\lambda_q^4 + b_1\lambda_q^2 + B_2}] \frac{2R a_{11}}{\mu_n^2} = \frac{2R}{\mu_n^2} (a_{11}A_2 + 2P_{11}C_1 - \frac{P_{11}^2}{a_{11}}B_1) < =
\end{aligned}$$

Далее с использованием (1.2)-(1.4) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} S_{2q} \\
& = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q^2} [1 - 4R a_{11} \lambda_q^2 (\frac{P_{11}}{a_{11}} + 2 \frac{P_{11}\lambda_q^4 + C_1\lambda_q^2 + C_2}{a_{11}\lambda_q^4 + B_1\lambda_q^2 + B_2})] f_{2q} = 0 \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Так как $s_0 = f_0$, то из (3.3), (3.4) непосредственно следует (3.2) и следовательно (2.2).

Докажем, что и условие Коха (2.3) выполняется.

Так как из (2.7) следует, что $e_{mq} = e_{qm}$, то запишем

$$\sum_{\substack{m, q=1 \\ m \neq q}}^{\infty} e_{mq}^2 = \frac{2}{G^4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{(S_{m+q} - S_{m-q})^2}{\lambda_m^4 \lambda_q^4} \quad (3.5)$$

Оценим $S_{m \pm q}$

$$\begin{aligned}
|S_{m+q}| &= \left| [1 - R a_{11} \lambda_{m+q}^2 \left(\frac{P_{11}}{a_{11}} + \frac{P_{11}\lambda_q^4 + C_1\lambda_q^2 + C_2}{a_{11}\lambda_q^4 + B_1\lambda_q^2 + B_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{P_{11}\lambda_m^4 + C_1\lambda_m^2 + C_2}{a_{11}\lambda_m^4 + B_1\lambda_m^2 + B_2} \right) \right] | f_{m+q} | \leq \\
& \leq N \lambda_{m+q}^{-\frac{2}{3}} \leq N (\lambda_m + \lambda_q)^2 \lambda_{m+q}^{-\frac{2}{3}} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

где N - положительная константа.

С учетом (3.5), (3.6) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m, q=1 \\ m \neq q}}^{\infty} c_{m, q}^2 &\leq \frac{2}{G^4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{(1S_{m+q} + 1S_{m-q})^2}{\lambda_m^4 \lambda_q^4} \leq \\
&\leq \frac{8H^2}{G^4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{(\lambda_m + \lambda_q)^4}{\lambda_m^4 \lambda_q^4 \lambda_{m-q}^4} \\
&= \frac{8H^2}{G^4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m-q}^4} \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_q} \right)^4 \\
&= \frac{8H^2}{G^4} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=q+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m-q}^4} \sum_{i=0}^4 \frac{C_4^i}{\lambda_m^i \lambda_q^{4-i}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь C_4^i - биномиальные коэффициенты.

Меняя порядок суммирования в (3.7) и вводя замену индекса m на индекс j соотношением $m - q = j$, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m, q=1 \\ m \neq q}}^{\infty} c_{m, q}^2 &\leq \frac{8H^2}{G^4} \sum_{j=1}^{\infty} C_4^j \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_q^4 (\lambda_j + \lambda_q)^4} \frac{1}{\lambda_j^{4-j}} \\
&\leq \frac{8H^2}{G^4} \sum_{j=1}^{\infty} C_4^j \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_q^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^j} < \infty
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Таким образом, условия Коха для детерминанта бесконечной системы алгебраических уравнений, эквивалентной системе (1.1), выполняются.

Заметим, что и предположении $\alpha > 2$ аналогичным образом можно обосновать принадлежность определителя к классу нормальных [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекин Э.В., Глуни В.Ц. Устойчивость гибкой слоистой ортотропной цилиндрической оболочки. - Изв. вузов, Машиностроение, 1978, 6, с. 13-16.
2. Белубекин Э.В., Глуни В.Ц., Сейранян С.П. Применение метода последовательной безусловной минимизации к решению оптимальных задач устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций. - В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всес. конференции. Вильнюс, 1979, с. 29-30.
3. Сейранян С.П. Оптимизации слоистой композитной цилиндрической оболочки по критерию максимума устойчивости или основной частоты собственных коле-

баний.- Автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ереван, 1986, 19 с.

4. Гнузи В.Ц., Сейрамян С.П. К вопросу оптимизации устойчивости моментного состояния слоистой цилиндрической оболочки.- ЕГУ, междуз. сб. и. т. Механика, 1981, вып. 2, с.55-61.
5. Сейрамян С.П. Об оптимальных двухслойных ортотропных цилиндрических оболочках по критерию максимума устойчивости или низкой частоты собственных колебаний.- В сб.: Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. Тезисы докл. Всесоюзной конференции. Вильнюс, 1983. с.63.
6. Джонс Р.М., Хеннеманн Дж.К.Ф. Влияние докритических деформаций на устойчивость слоистых композитных круговых цилиндрических оболочек.- Ракетная техника и космонавтика, 1980, т. 18, 3, с. 135-143.
7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974. 446с.
8. Канторович Л.В., Крылов В.Н. Приближенные методы высшего анализа.- Л.: ГИИТЛ, 1949. 693 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 23.04.1992