

АНТИПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

ТОНОЯН В.С., МЕЛКУМЯН Н.С.

Տոնոյան Վ.Ս., Մելքումյան Ն.Ս. Կիսաանցվերը ճարձ անաճական կիսաճարձրոյան ճակաճարձ կոնտակտի խնդիր:

Tonolian V.S., Melkumian N.S. Anti-plane contact problem for elastic half-plane with semi-infinite crack

Դիտարկված է կիսաանցվերը ուղղաճայան ճարձ ունեցող անաճական իզոտրոպ կիսաճարձրոյան կոնտակտի խնդիրը: Կիսաճարձրոյան եզրից կիրառված են երկու կամայական ձիւժ ունեցող, ճարձ անանցի ցկատման ճանաչափ տեղադրված ճարձ դրոշմեր:

Рассмотрена антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости с вертикальной полубесконечной трещиной. На границе полуплоскости приложены два жестких гладких штампа с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси трещины.

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругого изотропного полупространства ($x \geq 0$) с вертикальной полубесконечной трещиной ($a < x < \infty$).

На границе полупространства прикреплены два жестких гладких штампа конечных размеров ($0 \leq y \leq b$) с основанием произвольной формы, симметрично расположенные относительно оси трещины. Принимается, что на штампы, на границе полупространства и на берегах трещины действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации. Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) со смешанными граничными условиями.

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных интегральных уравнений. Парные интегральные уравнения решаются в замкнутом виде методом ортогонализации и полученная система сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Получены формулы для определения перемещений в точках берегов разреза и напряжений вне разреза, выделен коэффициент особенности интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого

разрешения материала, получается выражение, которое определяет рн пространство трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде. В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} U_z(0, y) &= f_1(y) & 0 \leq y \leq b, & \quad f_1(0) = 0 \\ \tau_{xz}(0, y) &= f_2(y) & b < y < \infty \\ U_z(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq a \\ \tau_{zy}(x, 0) &= f_3(x) & a \leq x < \infty \end{aligned} \quad (1)$$

Решение поставленной задачи математически сводится к решению гармонического уравнения относительно функции перемещения $U_z(x, y)$. Решение гармонического уравнения ищется в виде суммы интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} U_z(x, y) &= \int A(\alpha) \exp(-\alpha x) \sin(\alpha y) d\alpha \\ &+ \int C(\beta) \exp(-\beta x) \sin(\beta y) d\beta \end{aligned} \quad (2)$$

Используя обычные уравнения, связывающие касательные напряжения с перемещением $U_z(x, y)$, получаются

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -G \int \alpha A(\alpha) \exp(-\alpha x) \sin(\alpha y) d\alpha \\ &+ G \int \beta C(\beta) \exp(-\beta x) \cos(\beta y) d\beta \\ \tau_{zy} &= -G \int \alpha A(\alpha) \exp(-\alpha x) \cos(\alpha y) d\alpha \end{aligned}$$

$$-G \int \beta C(\beta) \exp(-\beta y) \sin(\beta x) d\beta \quad (3)$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ - неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). Удовлетворяя граничным условиям (1), получается следующая система парных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} A(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha = f_1(y) \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \sin(\alpha y) d\alpha \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{G} f_2(y) + \int_0^{\infty} \beta C(\beta) \exp(-\beta y) d\beta \quad b < y < \infty$$

$$\int_0^{\infty} C(\beta) \sin(\beta x) d\beta = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\int_0^{\infty} \beta C(\beta) \sin(\beta x) d\beta$$

$$= -\frac{1}{G} f_3(x) + \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) \exp(-\alpha x) d\alpha \quad a < x < \infty \quad (5)$$

Подобные парные интегральные уравнения рассматривались в работах [2-4] и в др.

Используя результаты работы [3] для функции $A(\alpha)$ и $C(\beta)$, получаются следующие выражения из [4] и [5]:

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi_1(r) J_0(\alpha r) dr + \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \varphi_2(r) J_0(\alpha r) dr$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \beta C(\beta) d\beta \int_b^{\infty} r K_0(\beta r) J_0(\alpha r) dr \quad (6)$$

$$C(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t \varphi_3(r) J_0(\beta t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha A(\alpha) d\alpha \int_0^{\infty} t K_0(\alpha t) J_0(\beta t) dt \quad (7)$$

где $J_\nu(z)$ - функции Бесселя первого рода с действительными аргументами, $K_1(\beta r)$ функция Макдональда.

$$\varphi_1(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{y f_1(y)}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{r}{G} \int_r^{\infty} \frac{f_2(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}} dy$$

$$\varphi_3(r) = -\frac{1}{G} \int_l^{\infty} \frac{f_3(x)}{\sqrt{x^2 - l^2}} dx$$

Исключая функцию $C(\beta)$ из (6) и (7), для определения функции $\alpha A(\alpha) = Q(\alpha)$ получается следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$Q(\alpha) = \Omega(\alpha) + \int_0^{\infty} Q(\gamma) K(\gamma, \alpha) d\gamma \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha) = & \frac{2}{\pi} \alpha \int_0^b \varphi_1(r) J_0(\alpha r) dr + \frac{2}{\pi} \alpha \int_b^{\infty} \varphi_2(r) J_0(\alpha r) dr \\ & + \frac{4}{\pi^2} \alpha \int_a^{\infty} t \varphi_3(t) dt \int_b^{\infty} \frac{r J_0(\alpha r)}{t^2 + r^2} dr \end{aligned} \quad (9)$$

$$K(\gamma, \alpha) = \frac{4}{\pi^2} \alpha \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} K_0(\gamma t) dt \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{t J_0(\alpha t)}{t^2 + \alpha^2} dt \quad (10)$$

Покажем, что интегральное уравнение (8) можно решить методом последовательных приближений [4]. Нетрудно видеть, что:

$$|K(\gamma, \alpha)| < \frac{4}{\pi^2} \alpha \frac{\ln \frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma^2 - \alpha^2}$$

$$\int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} |K(\gamma, \alpha)| d\gamma < \frac{4}{\pi^2} \alpha \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{\ln \frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma^2 - \alpha^2} d\gamma = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} \frac{\ln \frac{\gamma}{\alpha}}{\gamma (\frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha}{\gamma})} d\gamma \quad (11)$$

Перейдем к новым переменным следующим образом: переменную интегрирования γ , заменяя через $\gamma = e^{\eta}$, а переменную (параметр) α , заменяя через $\alpha = e^{\chi}$. После таких преобразований неравенство (11) примет вид:

$$\int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} |K(\gamma, \alpha)| d\gamma < \int_{-\infty}^{\infty} |K(\eta, \chi)| d\eta < \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta - \chi) d(\eta - \chi)}{\sinh(\eta - \chi)}$$

пользуясь значением интеграла

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sinh \xi} = \frac{\pi}{2}$$

получается

$$\int_0^{\frac{\gamma}{\alpha}} |K(\gamma, \alpha)| d\gamma < 1$$

Очевидно, что функция $\Omega(\alpha)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\alpha \rightarrow \infty$.

Решая интегральное уравнение (8) методом последовательных приближений, получается выражение функции $Q(\gamma)$. Далее, по формуле (7) определяется искомая функция $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, перемещения осевого разреза ($y = 0$) и напряжения вне разреза определяются

форми:

$$U(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_a^x \frac{t p_2(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^a Q(\alpha) d\alpha \cdot \int_x^\infty \frac{K_0(\alpha t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \quad (12)$$

$$(a < x < \infty)$$

$$\begin{aligned} z_{2j}(x, 0) = & G \int_0^\infty Q(\alpha) \exp(-\alpha x) d\alpha \\ & - \frac{2}{\pi} G x \frac{p_2(x)}{\sqrt{x^2 - x^2}} - \frac{2}{\pi} G x \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^2}} \int_0^\infty Q(\alpha) K_0(\alpha x) d\alpha \\ & + \frac{2}{\pi} G x \int_a^\infty \frac{[p_2(t)]}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt + \frac{2}{\pi} G x \int_0^\infty Q(\alpha) \int_a^\infty \frac{[K_0(\alpha t)]}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt d\alpha \quad (13) \end{aligned}$$

Коэффициент особенности K имеет вид:

$$K = \frac{2}{\pi} G x \left[p_2(x) - \int_0^\infty Q(\alpha) K_0(\alpha x) d\alpha \right]$$

Приравняв значение коэффициента интенсивности напряжений (14) к критической величине ($K = K_c$) по теории хрупкого разрушения [5], получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1973. 372 с.
2. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической функции. - Л.: Наука, 1977. 220 с.
3. Тоноян В.С. О решении симметричной контактной задачи для полуплоскости с включением. - Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1968, т. 21, 3, с. 3-18.
4. Мелкумян С.А. Контактная задача для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. - Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. 4, 3.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.

Институт механики АН Армении
Поступила в редакцию 22.11.1991