

ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ГРИГОРЯН Э.Х.

Գրիգորյան Է.Ք., կիսաանվերջական վրա զտնվող կիսաանվերջական ձեռնարկի ծնունդը

E. Ch. Grigorian Bending of semi-infinite beam, lying on elastic half-plane

Հոդվածի ղեկավարողը և ձեռնարկի հեղինակը Վերնիկյան Է. Խ. Կիսաանվերջական վրա զտնվող կիսաանվերջական ձեռնարկի ծնունդը

На основе метода обобщенного преобразования Фурье решена задача изгиба полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости.

В работе [1] получено замкнутое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на упругой полуплоскости, с помощью предельного перехода в решении соответствующей пространственной задачи (стремления к нулю параметра преобразования Фурье). Эта задача, в частности, рассмотрена также в работах [2,3] замкнутое решение которой получено сведением ее к краевой задаче Карлемана для аналитических функций, в которых показано, что контактные напряжения (нормальные) при $x \rightarrow 0$ имеют порядок $O(x^{-\frac{1}{2}})$, а при $x \rightarrow \infty$ $O(x^{-4})$.

В настоящей работе опять рассматривается изгиб полубесконечной балки (цилиндрический изгиб пластинки) на упругой полуплоскости, когда к концу балки приложена сила Q_0 и момент M_0 . Исследование ведется, как обычно, без учета касательных контактных напряжений и без учета явления отрыва балки от упругой полуплоскости.

Задача с помощью обобщенного преобразования Фурье сводится к решению функционального уравнения на действительной оси. Дается замкнутое решение этого функционального уравнения. Простая факторизация коэффициента функционального уравнения дает возможность вычислить две произвольные постоянные, которые содержатся в решении функционального уравнения, и, тем самым, получить простые асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от него точках балки. Из асимптотической формулы, характеризующей поведения контактных напряжений в окрестности конца балки следует, что при $\frac{Q_0}{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda$, в конце балки, контактное

напряжение равно нулю, т.е. особенность исчезает ($\lambda = \left(\frac{\mu}{(1-\nu)D} \right)^{\frac{1}{2}}$) (μ, ν - соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, D - жесткость балки. Кроме того, балка, в точках некоторой окрестности своего конца, при $Q_0/M_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda$ вдавливается на полуплоскость, а в остальном - растягивает ее. Из асимптотической формулы, характеризующей появление контактных напряжений при $x \rightarrow \infty$, следует, что после некоторого значения x , балка всегда растягивает полуплоскость.

Пусть на границе упругой полуплоскости лежит полубесконечная балка с жесткостью D , к концу которой приложена сила Q_0 и момент M_0 . Требуется определить нормальные контактные напряжения, действующие на участке балки с границей полуплоскости. Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид

$$D \frac{d^4 v^{(1)}}{dx^4} = q(x), \quad (0 < x < \infty) \quad (1)$$

при условии

$$\begin{aligned} D \frac{dv^{(1)}}{dx} \Big|_{x=0} &= X_0, & D \frac{d^2 v^{(1)}}{dx^2} \Big|_{x=0} &= M_0 \\ D \frac{d^3 v^{(1)}}{dx^3} \Big|_{x=0} &= -Q_0 \end{aligned} \quad (2)$$

где $q(x)$ - интенсивность нормальных контактных напряжений, $v^{(1)}(x)$ - вертикальные перемещения точек балки, X_0 - неизвестная постоянная.

Отметим что условия равновесия балки имеют вид

$$\int_0^{\infty} q(x) dx = Q_0, \quad \int_0^{\infty} x q(x) dx = M_0 \quad (3)$$

Для дальнейшего введем класс функций

$$A^{\pm}(x) = \theta(\pm x) A(x)$$

$$A^{\pm}(\sigma) = F[\pm A(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} A^{\pm}(x) \exp(i\sigma x) dx$$

$$A^{\pm}(x) = F^{-1} [\bar{A}^{\pm}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}^{\pm}(\sigma) \exp(-i\sigma x) d\sigma$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, F - преобразование Фурье, а F^{-1} - обратное преобразование. Кроме того [4],

$$\bar{A}^{\pm}(\sigma) \bar{B}^{\pm}(\sigma) = \bar{C}^{\pm}(\sigma), \text{ т. е. } F^{-1} [\bar{C}^{\pm}(\sigma)] = \theta(\pm x) C(x)$$

После обозначения $V_1(x) = dv^{(1)}/dx$, граничную задачу (1), можно записать одним уравнением при $-\infty < x < \infty$ следующего вида:

$$D \frac{d^3 V_1^{\pm}(x)}{dx^3} = q^{\pm}(x) - Q_0 \delta(x) + M_0 \delta'(x) + X_0 \delta''(x) \quad (4)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

Теперь, применив к (4) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$i\sigma^3 \bar{V}_1^{\pm}(\sigma) = \frac{\bar{q}^{\pm}(\sigma)}{D} - \frac{Q_0}{D} - i\sigma \frac{M_0}{D} - \frac{\sigma^2 X_0}{D} \quad (5)$$

С другой стороны, для другой полуплоскости известно [5], что

$$V^+(x) + V^-(x) = -\frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^+(s)}{s-x} dx \quad (6)$$

где $V(x) = dv/dx$, $v(x, 0)$ - вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости. Применив к (6) преобразование Фурье, будем иметь

$$\frac{1-\nu}{\mu} i \sigma \bar{q}^+(\sigma) = \bar{V}^+(\sigma) + \bar{V}^-(\sigma) \quad (7)$$

$$(-\infty < \sigma < \infty)$$

Далее, имея в виду условие контакта

$$V^+(x) = V_1^+(x)$$

из (5) и (7) получим функциональное уравнение, разрешающее поставленную задачу

$$(\lambda^3 + |\sigma|^3) \bar{q}^+(\sigma) + i\sigma^3 \bar{V}^-(\sigma) = \bar{f}(\sigma) \quad (8)$$

где

$$\bar{f}(\sigma) = \lambda^3 Q_0 + \lambda^3 \sigma^2 X_0 + i\sigma \lambda^3 M_0, \quad \lambda = [\mu/D(1-\nu)]^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (8), которое будем решать методом, изложенным в [4,6]. Факторизуем $\lambda^3 + |\sigma|^3$, представив ее в виде

$$\lambda^3 + |\sigma|^3 = \bar{K}^+(\sigma) K^-(\sigma) \quad (9)$$

где

$$\bar{K}^+(\sigma) = (\sigma + i0)^{\frac{3}{2}} \bar{G}^+(\sigma), \quad \bar{K}^-(\sigma) = (\sigma - i0)^{\frac{3}{2}} \bar{G}^-(\sigma)$$

$$\bar{G}^{\pm}(\sigma) = \exp \bar{\Psi}^{\pm}(\sigma), \quad \bar{\Psi}^{\pm}(\sigma) = \int_0^{\infty} \Psi(x) \exp(\pm i\sigma x) dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\lambda^3}{|\sigma|^3}\right) \exp(-i\sigma x) d\sigma$$

$$(\sigma \pm i0)^{\frac{3}{2}} = \sigma_+^{\frac{3}{2}} \mp \sigma_-^{\frac{3}{2}}, \quad \sigma_+^{\frac{3}{2}} = \theta(\sigma) \sigma^{\frac{3}{2}}, \quad \sigma_-^{\frac{3}{2}} = \theta(-\sigma) |\sigma|^{\frac{3}{2}}$$

Теперь, подставляя факторизованную функцию $\lambda^3 + |\sigma|^3$ из (9) в (8), после некоторых преобразований, приходим к уравнению

$$\bar{L}_1^+(\sigma) = \bar{K}^+(\sigma) q^+(\sigma) = \bar{g}^-(\sigma) = \bar{L}_2^-(\sigma) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (10)$$

где

$$\bar{g}^-(\sigma) = [-i\sigma^3 \bar{V}^-(\sigma) + \bar{f}(\sigma)] \cdot [\bar{K}^-(\sigma)]^{-1}$$

Из (10) следует

$$L_1^+(x) = L_2^-(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

которое может иметь место только при [7]

$$L_1^+(x) = L_2^-(x) = a_0 \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \delta^{(k)}(x) \quad (11)$$

где $\delta^{(k)}(x)$ - производная функции $\delta(x)$ порядка k , k - любое конечное число. Далее, применив преобразования Фурье к (11), получим

$$\bar{K}^+(\sigma) \bar{q}^-(\sigma) = \bar{g}^-(\sigma) = a_0 + a_1 \sigma + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \sigma^k$$

Поскольку $q^+(x)$ и $V^-(x)$ при $x \rightarrow \pm 0$ имеют корневую особенность, то отсюда следует, что $\bar{q}^+(\sigma)$ и $\bar{V}^-(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ имеют порядок $\bar{q}^+(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$, $\bar{V}^-(\sigma) \approx |\sigma|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда нетрудно видеть, что $\bar{K}^+(\sigma) \bar{q}^-(\sigma) = \sigma$, $\bar{q}^-(\sigma) = \sigma$ при $\sigma \rightarrow \pm \infty$. Тогда из (12) будет следовать, что $a_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n$). Таким образом, искомое $\bar{q}^+(\sigma)$ определится в виде

$$\bar{q}^+(\sigma) = \frac{a_0 + a_1 \sigma}{\bar{K}^+(\sigma)} \quad (13)$$

Для определения постоянных a_0 и a_1 заметим, что условия (3) можно записать в виде

$$\bar{q}^+(0) = Q_0, \quad \left. \frac{d\bar{q}^+(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = 1 M_0 \quad (14)$$

Удовлетворив условиям (14), получим

$$a_0 = Q_0 \bar{K}^+(0), \quad a_1 = 1 \bar{K}^+(0) M_0 + Q_0 \left. \frac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$$

Теперь приступим к вычислению $\bar{K}^+(0)$ и $\left. \frac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$

$\bar{K}^+(0)$ и $\left. \frac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$ можно записать в виде:

$$\bar{K}^+(0) = \exp \left[\bar{\Psi}^+(0) + \frac{3}{2} \ln(\sigma + i0) \right] \Big|_{\sigma=0}$$

$$\bar{K}^+(0) = \exp \left[\bar{\Psi}^+(\sigma) + \frac{3}{2} \ln(\sigma + i0) \right] \Big|_{\sigma \rightarrow 0}$$

$$\frac{d\bar{K}^+(\sigma)}{d\sigma} \Big|_{\sigma \rightarrow 0} = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{\sigma + i0} + \frac{d\bar{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma \rightarrow 0} \bar{K}^+(0)$$

Рассмотрим $\bar{\Psi}^+(\sigma)$, выписывая ее в виде

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^+(\sigma) = & \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{\lambda^3}{s^3} \right) \cos(sx) ds \cos(\sigma x) dx \\ & + i \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(\lambda^3 + s^3) \cos(sx) ds \sin(\sigma x) dx \\ & - 3i \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(s) \cos(sx) ds \sin(\sigma x) dx \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{\lambda^3}{s^3} \right) \cos(sx) ds \cos(\sigma x) dx \\ = \frac{1}{2} \ln(\lambda^3 + |\sigma|^3) - \frac{3}{2} \ln|\sigma| \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(s) \cos(sx) ds = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{ix} + A \delta(x) \right) - \text{в смысле теории обобщенных функций, где } A - \text{ произвольная постоянная и, что}$$

то

$$\int_0^\infty \frac{\sin \sigma x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \sigma$$

то

$$\bar{\Psi}^+(\sigma) = \frac{1}{2} \ln(\lambda^3 + |\sigma|^3) - \frac{3}{2} \ln|\sigma| + 3i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \sigma + i T(\sigma)$$

Здесь

$$\tilde{f}(\sigma) = \int_0^\infty f(x) \sin \sigma x dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln(\lambda^2 + s^2) \cos sx ds$$

Далее, поскольку $\ln(\lambda^2 + s^2) = 3 \ln \lambda + O(s^2)$ при $s \rightarrow 0$, то из (14) следует, что $f(x) \sim x^{-4}$ при $x \rightarrow \infty$, а так как при $x \rightarrow 0$ имеем

$$\ln(\lambda^2 + s^2) = 3 \ln s + O(s^{-2})$$

то при $x \rightarrow 0$ $f(x) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \Lambda \delta(x) \right) + O(x^2 \ln|x|)$. Это говорит о том, что $x f(x)$ суммируемая функция. Следовательно,

$$\left. \frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \int_0^\infty f(x) x dx, \quad \tilde{f}(\sigma) \Big|_{\sigma=0} = 0$$

Из вышесказанного следует, что

$$(\tilde{\Psi}^+(\sigma) + \frac{3}{2} \ln(\sigma + i0))_{\sigma \rightarrow 0} \sim 3i \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln \lambda \quad (15)$$

а

$$\left[\frac{d\tilde{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} + \frac{3}{2} (\sigma + i0)^{-1} \right]_{\sigma \rightarrow 0} = \left(\frac{d\tilde{f}(\sigma)}{d\sigma} \right) \Big|_{\sigma=0}$$

где

$$\ln(\sigma + i0) = \ln|\sigma| + i\pi\theta(-\sigma)$$

Оказывается, что

$$\left[\frac{d\tilde{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} + \frac{3}{2} (\sigma + i0)^{-1} \right]_{\sigma \rightarrow 0} = -\frac{3}{2} \pi - \frac{3i}{2\lambda} \quad (16)$$

в чем убедимся в дальнейшем.

С помощью формул (15), и (16) a_0 и a_1 определяются как

$$a_0 = Q_0 \lambda \sqrt{\lambda} \exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right), \quad a_1 = -i \exp\left(3i\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\lambda} \left(-\frac{3}{2} Q_0 - \frac{1}{2} \Lambda f_0\right)$$



Теперь приступим к определению асимптотических формул для $q(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$. Поэтому, как известно, надо рассмотреть разложения $\bar{q}^*(\sigma)$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ и $|\sigma| \rightarrow 0$ соответственно. Для этого, сначала, определим вид функции $d\bar{\Psi}^*(\sigma)/d\sigma$, проводя вычисления интеграла

$$\frac{d\bar{\Psi}^*(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i x \Psi(x) \exp(i(\sigma + i0)x) dx$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} i x \Psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda^3}{is} \right) \right] \exp(-isx) ds \\ &= -\frac{3\lambda^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-isx) ds}{s(\lambda + is)^3} \end{aligned}$$

где интеграл при $s \rightarrow 0$ понимается в смысле главного значения по Коши. В силу нечетности подынтегрального выражения и замены $sx = t$, $x \Psi(x)$ можно записать в виде

$$x \Psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^{\infty} \frac{3t^2 \cos t}{t^3 + \tau^3} dt d\tau$$

Далее, имея в виду, что

$$\frac{3t^2}{t^3 + \tau^3} = \frac{1}{(t+\tau)} + \frac{1}{\xi(t-\zeta\tau)} + \frac{1}{\xi(t-\bar{\zeta}\tau)}$$

где $\xi = \zeta - 1$, $\zeta = \exp(i\frac{\pi}{3})$, и что

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t - \bar{\zeta}\tau} dt = \pi i \exp(i\bar{\zeta}\tau) + \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t + \bar{\zeta}\tau} dt$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t - \zeta\tau} dt = -\pi i \exp(-i\zeta\tau) + \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t + \zeta\tau} dt$$

будем иметь

$$x \Psi(x) = 2 - 2 \cos\left(\lambda \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda x\right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda x} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t+\tau} + \frac{1}{\xi(t+\xi\tau)} + \frac{1}{\bar{\xi}(t+\bar{\xi}\tau)} \right] \cos t \, dt \, d\tau \quad (17)$$

Поскольку [8]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t+z} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{t \exp(-zt)}{t^2+1} \, dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

то формулу (17) можно записать в виде

$$x \Psi(x) = \frac{3}{2} - 2 \cos\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda x\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\lambda x t) - \exp(-\lambda \xi x t) - \exp(-\lambda \bar{\xi} x t)}{t^2+1} \, dt$$

Тогда нетрудно видеть, что $d\bar{\Psi}^+(\sigma)/d\sigma$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Psi}^+(\sigma)}{d\sigma} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\bar{\xi}}{1+\bar{\xi} \left(\frac{\sigma+i0}{\lambda} \right)} - \frac{\xi}{1-\xi \left(\frac{\sigma+i0}{\lambda} \right)} \right) - \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma+i0} \\ &- \frac{i}{\pi \lambda} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(t^2+1)(t-i(\frac{\sigma+i0}{\lambda}))} - \frac{\bar{\xi}}{(t^2+1)(t-i\bar{\xi}(\frac{\sigma+i0}{\lambda}))} \right. \\ &\left. - \frac{\xi}{(t^2+1)(t-i\xi(\frac{\sigma+i0}{\lambda}))} \right] dt \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1} \frac{dt}{t-y} = \frac{1}{y^2+1} \left(\frac{\pi}{2}(-y) - \ln(-y) \right), \quad \arg y \neq 0$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\Psi}^*(\sigma)}{d\sigma} &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)} - \frac{\zeta}{1 - \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)} \right] - \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma + i0} \\
 &- \frac{i}{\pi \lambda} \left[\frac{i \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{2} \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \ln \left(\zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)}{1 - \left(\zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)^2} \right. \\
 &- \frac{i \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{2} \bar{\zeta} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \ln \left(\bar{\zeta} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)}{\bar{\zeta} \left(1 - \left(\bar{\zeta} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)^2 \right)} \\
 &- \left. \frac{i \frac{\pi}{2} - i \frac{\pi}{2} \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \ln \left(\zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)}{\bar{\zeta} \left(1 - \left(\zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)^2 \right)} \right] \quad (18)
 \end{aligned}$$

Теперь, используя формулу (18), определим $\frac{d\bar{\Psi}^*(\sigma)}{d\sigma}$ при $|\sigma| < \lambda$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{\Psi}^*(\sigma)}{d\sigma} &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\bar{\zeta}}{1 + \bar{\zeta} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)} - \frac{\zeta}{1 - \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)} \right] - \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma + i0} \\
 &+ \frac{2i}{\pi \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(i \frac{\sigma}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \left(\cos \frac{\pi(2n+1)}{3} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi(2n+1)}{3} \right] \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{2n} \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{2n-1} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2} \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

и при $|\sigma| > \lambda$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\Psi}^{(n)}(\sigma)}{d\sigma} &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} (\zeta^{1-n} - (-1)^n \bar{\zeta}^{1-n}) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-n} \\
&- \frac{2i}{\pi\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{i\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \left[\cos \frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&- \left. \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{3} \right\} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-2n} \\
&- \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-(2n+1)} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) легко получить, что

$$\left(\frac{d\bar{\Psi}^{(1)}(\sigma)}{d\sigma} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma + i0} \right)_{\sigma=0} = -\frac{2i}{\sqrt{3}\lambda}$$

которое было использовано при вычислении a_1 .

С помощью формулы (19) определим $\bar{\Psi}^{(1)}(\sigma)$ при $|\sigma| < \lambda$

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}^{(1)}(\sigma) &= \ln \left\{ \left(1 + \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \left(1 - \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \right\} \\
&- \frac{3}{2} \ln \frac{\sigma + i0}{\lambda} + \frac{3i\pi}{4} + \bar{\varphi}^{(1)}(\sigma)
\end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi}^{(1)}(\sigma) &= \frac{2i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{2n+1} \left\{ \left(\frac{i\pi}{2} - \ln \frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2(n+1)} \right\} \left(\cos \frac{\pi}{3} (2n+1) - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} (2n+1) \Big| \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2}}{2^n} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{2n}
\end{aligned}$$

а из (20) определим $\bar{\Psi}^{(1)}(\sigma)$ при $|\sigma| > \lambda$

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}^+(0) = & - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} (\zeta^{1/2} - (-1)^n \zeta^{1/2}) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{1-n} \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \frac{1}{2n-1} \right) \left(\cos \frac{\pi(2n-1)}{3} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi(2n-1)}{3} \right] \frac{1}{2n-1} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{1-2n} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-2n} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2} \right) \quad (22)
\end{aligned}$$

Отметим, что выше имелось в виду, что $\bar{\Psi}^+(0) = \frac{2\pi}{\lambda}$ и, что $\bar{\Psi}^+(0) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Теперь приступим к определению разложения $\bar{q}^+(\sigma)$ при $|\sigma| < \lambda$ и $|\sigma| > \lambda$. Подставляя выражения $\bar{\Psi}^+(\sigma)$ из (21) и (22) в (13), получим

$$\begin{aligned}
\bar{q}^+(\sigma) = & \frac{(a_0 + a_1\sigma) \exp \left(-\frac{2\pi\sigma}{\lambda} \right)}{\left(1 + \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \left(1 - \zeta \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right)} \left[1 \right. \\
& \left. - \bar{\varphi}^+(\sigma) + \frac{1}{2} \bar{\varphi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6} \bar{\varphi}^{+3}(\sigma) + \dots \right] \quad \text{при } |\sigma| < \lambda
\end{aligned}$$

$$\bar{q}^+(\sigma) = \frac{(a_0 + a_1\sigma)}{(\sigma + i0)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \bar{\Psi}^+(\sigma) + \frac{1}{2} \bar{\Psi}^{+2}(\sigma) - \frac{1}{6} \bar{\Psi}^{+3}(\sigma) + \dots \right]$$

при $|\sigma| > \lambda$.

Используя эти разложения, получим

$$\begin{aligned}
\bar{q}^+(\sigma) = & \frac{Q_0}{\pi} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \right) \\
& - \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q_0}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + i M_0 \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{2} \lambda M_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} Q_0 \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^4 \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right) \\
& - \frac{Q_0}{2\pi} \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^6 \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{\pi} \left(\frac{Q_0}{2} \right. \\
& \left. - \sqrt{3} \lambda M_0 \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^5 \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right) + \dots
\end{aligned}$$

при $|\sigma| < \lambda$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}^{-1}(\sigma) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} Q_0 - \lambda M_0 \right) \exp \left(\frac{3i\pi}{4} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&- \left(\frac{Q_0}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda M_0 \right) \exp \left(\frac{3i\pi}{4} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&- \frac{2}{3} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}} + \lambda M_0 \right) \exp \left(\frac{3i\pi}{4} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-\frac{5}{2}} \\
&- \frac{4}{9\sqrt{3}} \left(\frac{5Q_0}{2\sqrt{3}} + \lambda M_0 \right) \exp \left(\frac{3i\pi}{4} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-\frac{7}{2}} \\
&+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}} - \lambda M_0 \right) \exp \left(\frac{3i\pi}{4} \right) \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{i\pi}{2} \right. \\
&\left. - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \frac{1}{3} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{24}$$

при $|\sigma| > \lambda$

Далее, применяя к (23) и (24) обратные преобразования Фурье и имея в виду формулы [7],

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[\left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^k \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) \right) \right] \\
= (-i)^k + \frac{F(n+1)}{i^n} \delta(-\sigma + \lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[\left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^k \left(i \frac{\pi}{2} - \ln \left(\frac{\sigma + i0}{\lambda} \right) + \frac{1}{3} \right)^2 \right] \\
= \frac{2\Gamma(2)}{i^k} \delta^{-1} \left(\eta(\tau) - \frac{1}{3} - \ln \lambda \right),
\end{aligned}$$

$$F^{-1}[(\sigma + i0)^{-\beta-1}] = \frac{\exp(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta))}{\Gamma(1+\beta)} x^\beta$$

$$F^{-1}[(\sigma + i0)^{-\beta-1} \ln(\sigma + i0)]$$

$$= \frac{\exp(-i\frac{\pi}{2}(1+\beta))}{\Gamma(1+\beta)} x^\beta (i\frac{\pi}{2} + \Psi(1+\beta) - \ln x),$$

где $\kappa > 0$, $\beta = 1, 2, 3, \dots$, $\Gamma(\kappa)$, $\Psi(x)$ — соответственно известные гамма и пси функции, получим искомые асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} q(x) = & -\frac{Q_0 \Gamma(4)}{\pi} (\lambda x)^{-4} - \frac{\Gamma(5)}{\pi} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}} + \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-5} \\ & + \frac{\Gamma(6)}{\pi} \left(\frac{Q_0}{2} - \sqrt{3} \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-6} \\ & + \frac{\Gamma(7)}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} Q_0 - \frac{3}{2} \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-7} \\ & - \frac{\Gamma(7)}{2} Q_0 (\lambda x)^{-7} \left(\Psi(7) - \frac{1}{3} - \ln(\lambda x) \right) + O(x^{-9} (1 + \ln x)) \end{aligned} \quad (25)$$

при $|\lambda x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} q(x) = & \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{2Q_0}{\sqrt{3}} - \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-\frac{1}{2}} \\ & - \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{Q_0}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-\frac{3}{2}} \\ & - \frac{2}{3\Gamma(\frac{5}{2})} \left(\frac{Q_0}{\sqrt{3}} + \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-\frac{5}{2}} \\ & + \frac{4}{9\sqrt{3}\Gamma(\frac{7}{2})} \left(\frac{3}{2} \frac{Q_0}{\sqrt{3}} + \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(\frac{2 Q_0}{\sqrt{3}} - \lambda M_0 \right) (\lambda x)^{\frac{5}{2}} \left(\Psi\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{3} - \ln \lambda x \right) \\
& + O\left(x^{\frac{7}{2}} (1 + \ln x)\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

при $x \rightarrow 0$

Как следует из формулы (26), при $Q_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda M_0$ особенность функции $q(x)$ в точке $x=0$ исчезает. Кроме того, при $Q_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda M_0$ $q(x) > 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$, т.е. балка в этой окрестности вдавливается на полуплоскость. Очевидно, что если $Q_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda M_0$ балка растягивает полуплоскость в некоторой окрестности точки $x = 0$. Из асимптотической формулы (25) можно сделать заключение, что после некоторого значения x балка всегда растягивает полуплоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, дежащей на линейно деформируемом основании. ПММ, - 1961, т.25, вып.2.
2. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, - 1974, т.38, вып.2.
3. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. - ПММ, 1975, т.39, вып.6.
4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1971.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.: Наука, 1989.
6. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. - Ученые записки ЕГУ, естество, науки, 1979, т.3.
7. Справочная математическая библиотека Функциональный анализ. - М.: Наука, 1972.
8. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979.

Ереванский Государственный Университет.
Поступила в редакцию 22.05 1992.